Nivel Superior

CONDICIONES DE COMPACIDAD Y SEMICONTINUIDAD EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Fernando Luque Vásquez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Un problema importante cuando se utilizan algoritmos como programación dinámica e iteración de valores en optimización, teoría de control y campos relacionados, es el siguiente: Sean X, Y *espacios métricos,* $x \mapsto \Phi(x)$ *una multifunción de* X *en* Y *y* v *una función de valores reales con dominio la gráfica de* Φ*, la cual se define por*

$$Gr(\Phi) := \{(x, y) : x \in X,\ y \in \Phi(x)\}.$$

¿Bajo qué condiciones, la función v^* *definida en* X *por*

$$v^*(x) := \inf_{y \in \Phi(x)} v(x, y),$$

es una función semicontinua inferiormente en X*? En esta exposición se presentan algunos resultados en los cuales, bajo condiciones de compacidad y semicontinuidad se resuelve el problema, y se presentan algunos ejemplos que muestran la necesidad de imponer este tipo de condiciones.*

Introducción

Cuando se estudian los valores extremos (supremo e ínfimo) de una función de valores reales, definida en un subconjunto de un espacio métrico, puede ocurrir que éstos no sean números reales o que no existan puntos en el dominio de la función donde se alcancen tales valores extremos. Para garantizar que no se presenta alguno de esos casos, es necesario imponer condiciones tanto a la función como a su dominio. Un resultado clásico en ese sentido es el siguiente (ver [6] Theorem 4.16).

Teorema 1. Sea X un espacio métrico, $A \subset X$ y $f : A \to \mathbf{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f es acotada y existen $r, s \in A$ tal que $f(r) = \inf_{x \in A} f(x)$ y $f(s) = \sup_{x \in A} f(x)$.

La importancia de la condición de compacidad en el teorema anterior, puede verse en los siguientes ejemplos. Recordemos que por el Teorema de Heine Borel, un conjunto $A \subset \mathbf{R}$ es compacto si y solo si, es cerrado y acotado.

Ejemplo. Si $A \subset \mathbf{R}$ es no acotado, entonces:

(a) La función $f(x) := x$ es una función continua no acotada en A.

(b) La función

$$g(x) := \frac{|x|}{1 + |x|},$$

es continua y acotada en A, pero $g(x) \neq 1 = \sup_{y \in A} g(y)$ $\forall x \in A$.

Ejemplo. Si $A \subset \mathbf{R}$, no es cerrado, sea u un punto límite de A que no pertenece a A. Entonces:

(a) La función

$$f(x) := \frac{1}{x-u},$$

es continua no acotada en A.

(b) La función

$$g(x) := e^{-|x-u|},$$

es continua y acotada en A, pero $g(x) \neq 1 = \sup_{y \in A} g(y)\ \forall x \in A$.

Semicontinuidad y compacidad

En algunos casos, interesa solamente uno de los valores extremos. Por ejemplo, si f representa una función de costo, interesa minimizar la función, mientras que si f representa ganancia, interesa maximizar la función. Como veremos en el siguiente resultado, en estos casos es posible debilitar la condición de continuidad en el Teorema 1 para lo cual introducimos el siguiente concepto.

Definición 2. Una función $f : A \to \mathbf{R}$ se dice ser semicontinua inferiormente (s.c.i.) en A si para cada número real α, el conjunto

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\}$$

es un conjunto abierto.

Teorema 3. Sea f una función s.c.i. en un conjunto compacto A, entonces f es acotada inferiormente y alcanza su mínimo en A.

Demostración. Para $n = 1,2,\ldots$, sea

$$O_n := \{x \in A : f(x) > -n\}.$$

Cada conjunto O_n es abierto y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, por lo tanto, existe una subcubierta finita $\{O_{n_1},\ldots,O_{n_m}\}$ de A. Si $N = max\{n_1,\ldots,n_m\}$, entonces $f(x) > -N\ \forall x \in A$, es decir, f es acotada inferiormente. Sea

$$\beta := \inf_{x \in A} f(x)$$

y sea

$$F_n := \{x \in A : f(x) \leq \beta + \frac{1}{n}\}.$$

Entonces, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$, pues si suponemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \phi$, de las leyes de De Morgan se sigue que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$ y puesto que los conjuntos F_n^c, $n = 1,2,\ldots$ son abiertos y A es compacto, $A \subset \bigcup_{n=1}^{M} F_n^c$ para alguna M, y de nuevo, usando las leyes de De Morgan, se obtiene que $\bigcap_{n=1}^{M} F_n = \phi$ lo que contradice la definición de β. Sea $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces, $f(y) \le \beta$, y puesto que $f(y) \ge \beta$, se tiene que $f(y) = \beta$.

Definición 4. Una función $f : A \to \mathbf{R}$, se dice ser semicontinua superiormente (s.c.s.), si la función $(-f)$ es s.c.i.

Observación 5. (a) De la definición anterior y el Teorema 3, se sigue que una función s.c.s. en un conjunto compacto, es acotada superiormente y alcanza su máximo en un punto del conjunto. (b) Si $f(x) = I_A(x)$ (la función indicadora de A), entonces f es s.c.i. (s.c.s.) si y solo si A es un conjunto abierto (cerrado).

Semicontinuidad de la función del mínimo

Un problema importante en optimización, teoría de control y campos relacionados es el siguiente: Sean X y Y dos espacios métricos, Φ una multifunción de X en Y, es decir, una función que a cada $x \in X$ asigna un conjunto $\Phi(x) \in Y$ y v una función de valores reales con dominio la gráfica de Φ la cual se define por:

$$Gr(\Phi) := \{(x, y) : x \in X,\ y \in \Phi(x)\}.$$

El problema es dar condiciones bajo las cuales la función v^* definida en X por

$$v^*(x) := \inf_{y \in \Phi(x)} v(x, y), \quad x \in X,$$

es una función s.c.i.

Proposición 6. ([1], Proposition 7.32) Si Y es compacto, v es s.c.i. en $X \times Y$ y $\Phi(\cdot) \equiv Y$, entonces la función v^* es s.c.i. en X.

Ejemplo 7. Sea $X = \mathbf{R}$, $Y = [0, \infty)$,

$$\Phi(x) := \begin{cases} \{0\} & si\ \ x \le 0 \\ \\ [x, x + 1/x] & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

y

$$v(x, y) := \begin{cases} 1 & si\ \ x \le 0 \\ 1 - \dfrac{xy}{1 + x^2} & si\ \ x > 0,\ 0 \le y \le x + \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Entonces

$$v^*(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x \le 0 \\ 0 \ \ si \ \ x > 0, \end{cases}$$

y por lo tanto, de la Observación 5(b), se sigue que v^* no es s.c.i. en X aunque $\Phi(x)$ es compacto para cada $x \in X$ y v es continua en $Gr(\Phi)$.

Este ejemplo muestra que las condiciones de semicontinuidad de v y la compacidad de los conjuntos $\Phi(x)$, no son suficientes para garantizar la semicontinuidad de v^*, por lo que es necesario imponer condiciones adicionales en la multifunción, para lo cual definimos los siguientes conceptos.

Para cada subconjunto B de Y, sea $\Phi^{-1}(B) := \{x \in X : \Phi(x) \bigcap B \neq \phi\}$.

Definición 8. Una multifunción Φ de X en Y se dice ser:

(a) Semicontinua superiormente, si $\Phi^{-1}(F)$ es cerrado en X para cada conjunto cerrado $F \subset Y$.

(b) Semicontinua inferiormente, si $\Phi^{-1}(G)$ es abierto en X para cada conjunto abierto $G \subset Y$.

Proposición 9 ([7] Proposition 10.2). Supóngase que Φ es semicontinua superiormente y $\Phi(x)$ es compacto en Y para cada $x \in X$. Si v es semicontinua y acotada inferiormente entonces v^* es s.c.i. y acotada inferiormente en X.

En el Ejemplo 7, la multifunción $x \mapsto \Phi(x)$ no es semicontinua superiormente pues si consideramos el conjunto cerrado $B = [1/2, 1]$ en Y, entonces el conjunto $\Phi^{-1}(B) = (0,1]$ no es un conjunto cerrado en X.

Definición 10. Una función $v : Gr(\Phi) \to \mathbf{R}$ se dice ser inf-compacta en $Gr(\Phi)$, si para $x \in X$ y $r \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{y \in \Phi(x) : v(x,y) \le r\}$ es compacto.

Proposición 11 ([2] Proposition D.6(b), [3] Lemma 3.2(e)). Supóngase que $Gr(\Phi)$ es un subconjunto de Borel de $X \times Y$ y que v es semicontinua inferiormente e inf-compacta en $Gr(\Phi)$. Si la multifunción Φ^* definida por

$$\Phi^*(x) := \{y \in \Phi(x) : v^*(x) = v(x,y)\}$$

es s.c.i., entonces v^* es s.c.i en X.

Ejemplo 12 [4]. Sea $X = \mathbf{R}$, $Y = \Phi(x) = [0, \infty)$ para todo $x \in X$, y sea v definida por:

$$v(x,y):=\begin{cases} 1+y & si\ (x\le 0)\ o\ (x>0, 0\le y\le \frac{1}{2x}), \\ (2+\frac{1}{x})-(2x+1)y & si\ x>0, \frac{1}{2x}<y\le \frac{1}{x}, \\ y-\frac{1}{x} & si\ x>0, y>\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Entonces, la multifunción $x\mapsto \Phi(x)$ es continua, v es continua e inf-compacta en $Gr(\Phi)=\mathbf{R}\times[0,\infty)$ y acotada inferiormente (no negativa), pero

$$v^*(x)=\begin{cases} 1 & si\ x\le 0 \\ 0 & si\ x>0 \end{cases}$$

no es s.c.i. en X.

En este ejemplo,

$$\Phi^*(x)=\begin{cases} \{0\} & si\ x\le 0 \\ \\ \{1/x\} & si\ x>0 \end{cases}$$

no es s.c.i.

Bibliografía

[1] D.P. Bertsekas and S.E. Shreve, *Stochastic optimal control: The discrete time case*, Academic Press, New York, 1978.

[2] O. Hernández-Lerma and J.B. Lasserre, *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[3] O. Hernández-Lerma and W.J. Runggaldier, *Monotone approximations for convex stochastic control problems*, J. Math. Syst. Estimation and Control **4** (1994), 99-140.

[4] F. Luque-Vásquez and O. Hernández-Lerma, *A counterexample on the semicontinuity of minima*, Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), 3175-3176.

[5] U. Rieder, *Measurable selections theorems for optimization problems*, Manuscripta Math. **24** (1978), 115-131.

[6] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3d ed., McGraw-Hill, Kogakusha, 1976

[7] M. Shall, *Conditions for optimality and for the limit of n-stage optimal polices to be optimal*, Z. Wahrsh. Verw. Gebiete **32** (1975), 179-196.