

ESTUDIO SOBRE HEURÍSTICAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES EN SUS RAZONAMIENTOS PROBABILÍSTICOS

Enrique Hugues Galindo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Considerando que al enfrentar situaciones de tipo aleatorio se activa un razonamiento que involucra algunas ideas probabilísticas básicas, mostramos el tipo de indagación que se lleva a cabo en el estudio de las heurísticas que presentan los estudiantes al responder cuestiones que les requieren juzgar la probabilidad de eventos y sobre los errores que tienen lugar en ello. En este sentido, se consideran errores asociados a tres heurísticas: representatividad, equiprobabilidad y enfoque en el resultado aislado; que han sido abordados en estudios anteriores, de los que retomamos algunos elementos de análisis. Lo que a continuación se expone forma parte de investigación en curso en el proyecto “Caracterización de dificultades, obstáculos y comprensiones que se presentan a la educación en ideas básicas de Probabilidad y de Estadística en los niveles medio superior y superior”¹.

Introducción

Varias de las recientes reformas curriculares le otorgan un lugar más substancial a la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística. En ellas se observa un cambio en las creencias de cómo debe hacerse esto, enfatizándose la generación de intuiciones alrededor de conceptos e ideas básicas por encima de como se venía haciendo, especialmente respecto al desarrollo de conocimientos de términos y habilidades de cálculo.

Una estrategia sugerida para la enseñanza inicial de la Probabilidad, que ilustra lo señalado, sería: Implementar actividades de enseñanza donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios con recursos físicos (como monedas, dados, etc.), obtenga luego datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare resultados obtenidos experimentalmente con sus predicciones originales.

Tras este tipo de estrategia pueden ser identificadas algunas consideraciones respecto al aprendizaje, entre las que destacan las relativas al papel del sujeto en este proceso. Particularmente percibimos esto como una motivación y nos lleva a decir que las estrategias de enseñanza que están siendo promovidas se conciben como caminos mediante los cuales apoyar a los estudiantes a construir concepciones e intuiciones correctas sobre sucesos aleatorios.

Tales caminos no están exentos de dificultades y por ello resulta conveniente su exploración para detectar aquéllas que se presentan en su recorrido. En este punto, las concepciones previas de los estudiantes, tanto las surgidas de su interacción cotidiana con el medio ambiente como las resultantes de su exposición a la instrucción, requieren ser reveladas para poden enfrentar la posibilidad de que den lugar a modos de pensamiento que entren en conflicto con nuevos aprendizajes o con las estrategias con que éstos serán promovidos.

¹ Proyecto financiado por el Sistema de Investigación del Mar de Cortés y el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, con clave de registro 990103023.

Para lo anterior, este estudio, que se enfoca a estudiantes de bachillerato y de profesional, pretende captar y clasificar razonamientos a los que recurren los estudiantes al abordar situaciones bajo incertidumbre de tipo aleatorio. Aunque se toman en cuenta otros elementos, metodológicamente resulta central la elaboración de cuestionarios mediante los que se plantean situaciones que den lugar a razonamientos probabilísticos y el análisis de respuestas que a él proporcionen los estudiantes, en una orientación de corte cualitativo.

Heurísticas y sesgos

Algunas formas de razonamiento informal a los que frecuentemente recurren las personas han sido denominadas heurísticas y aunque se describa a éstas como “mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos a la complejidad de estímulos ambientales” (Pérez Echeverría, 1990), se ha de tener presente que no necesariamente dan lugar a resultados correctos.

Así, el estudio gira alrededor de los errores de razonamiento que se suelen presentar al enfrentar situaciones de tipo aleatorio. En este sentido se consideran errores asociados a tres heurísticas: representatividad, equiprobabilidad y enfoque en el resultado aislado; retomando en ello estrategias de estudio utilizadas a lo largo de 25 años de investigación y particularmente algunas de las reportadas por Serrano *et. al.* (1998).

Nos referimos por errores de razonamiento, a sesgos respecto a aquellos razonamientos acordes a la Teoría de la Probabilidad, lo que a su vez es denominado “el punto de vista normativo”. Dado que esperamos que estos razonamientos involucren ideas intuitivas y conceptos básicos de probabilidad, interesa también esclarecer su presencia.

Particularmente la heurística de representatividad consiste en la acción de evaluar la probabilidad de un evento basándose en la percepción de que tan característico resulta de la población o del proceso en el cual su ocurrencia se encuentra bajo consideración. Fue introducida por D. Kahneman *et. al.* (1982) para explicar razonamientos seguidos para enfrentar situaciones de tipo aleatorio, y quienes asocian a ella errores como el de insensibilidad al tamaño de muestra y algunas concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias.

Si bien, la mayoría de los estadísticos que se utilizan en estimación de parámetros poblacionales tienen dos propiedades que los hacen buenos estimadores: su valor esperado y su convergencia en probabilidad; estas se presentan a la larga. Así, aunque se pueda confiar en que buenas aproximaciones sean obtenidas mediante ellos, esto dependerá del tamaño de muestra y no se puede confiar en que los valores de los estadísticos alcancen al parámetro en una muestra pequeña. La creencia contraria descansa en adjudicar una representatividad excesiva de las características poblacionales a las muestras pequeñas y por ello es llamada *insensibilidad al tamaño de muestra*.

Análogamente, en un proceso aleatorio se espera que parte de la trayectoria, una muestra, represente fielmente al proceso. Esto se traduce en esperar que los resultados del proceso se han de producir sin un orden aparente por ser aleatorio, lo que constituye una *concepción errónea de*

las secuencias aleatorias. Particularmente se excluye la producción de rachas de un mismo resultado, creencia que es conocida como falacia del jugador.

Pasando por alto con qué tanta información se cuenta y qué tanta variación se puede presentar en situaciones aleatorias, las personas suelen tener inclinaciones erróneas al predecir eventos basados en que su representatividad los hace más probables o menos probables o usando la representatividad como medio para juzgar la correlación entre causas y efectos. Hay elementos que se toman para juzgar la representatividad de eventos: como son las frecuencias y la composición cualitativa de los eventos.

La equiprobabilidad y el enfoque en resultado aislado han surgido en otros estudios sobre heurísticas y sesgos en situaciones aleatorias. La primera de ellas consiste en una aplicación indiscriminada del principio laplaciano de indiferencia: la creencia de los sujetos en la *equiprobabilidad* de todos los eventos asociados a cualquier situación aleatoria (Lecoutre, 1992). La segunda aparece en la interpretación de probabilidades como creencia de que éstas miden la ocurrencia de eventos en la realización de un sólo experimento, es decir, interpretando a la probabilidad en un *enfoque de resultado aislado* (Konold, 1991). El recurso a esta heurística omite en parte la naturaleza probabilística, como viene a ser la estabilidad a la larga. En contraparte se tiende a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios.

Metodología

Nos limitamos a presentar tres reactivos y el análisis de respuestas que a ellos proporcionó un grupo de estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial inscritos en un curso de Probabilidad y Estadística. Esto forma parte del pilotaje de un conjunto de diez reactivos, realmente algunos son variantes de otros dispuestos en baterías de cuestionarios de seis cada uno, como trabajo encaminado a definir una versión más acabada de cuestionario único para una corrida posterior. Los cuestionarios han sido suministrados a más estudiantes, tanto de profesional como de bachillerato, de los que aquí se reporta.

La clasificación de respuestas de parte de los estudiantes, se lleva a cabo tomando en cuenta no sólo la alternativa elegida sino también el argumento verbal, o de cualquier otro tipo, que utilicen los estudiantes para respaldar su elección. Los reactivos bajo consideración son:

1. *¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada cinco veces?:*

a) AAASS; b) SAASA; c) SASSS; d) ASASA; e) Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

2. *¿Cuál de las siguientes sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada cinco veces?:*

a) b) c) SASSS; d) e) Las cuatro sucesiones son igual de

AAASS; SAASA; ASASA; probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

3. Si observamos los siguientes diez nacimientos, ¿qué te parece más probable?:

- a) La fracción de varones será mayor o igual a $7/10$;
- b) La fracción de varones será menor o igual a $3/10$;
- c) La fracción de varones estará comprendida entre $4/10$ y $6/10$;
- d) Las tres opciones anteriores a), b), c) son igual de probables.

Indica por qué das esta respuesta.

El primer reactivo ha sido diseñado para evaluar si los estudiantes usan la heurística de representatividad en sus juicios sobre la probabilidad de obtener diferentes sucesiones de resultados en el lanzamiento de una moneda. Si bien desde el punto de vista normativo todas las opciones tienen la misma probabilidad, los estudiantes se pudieran inclinar por una en específico guiados por la heurística de representatividad.

El siguiente reactivo sirve como control para el anterior y permite confirmar el tipo de razonamiento empleado, con una respuesta incorrecta a ambos y el contraste conjunto de argumentos. Konold *et. al.* (1993) sugieren que algunos de los estudiantes que hagan la elección correcta en estos dos reactivos pueden usar un razonamiento guiado por el enfoque en el resultado aislado, lo que sería reflejado en su argumentación.

El último reactivo explora las intuiciones alrededor de la distribución binomial, esperándose que estudiantes que recurren a la heurística de representatividad hagan una elección correcta pero argumentando incorrectamente.

Todos los reactivos cuentan con respuestas que se espera funcionen como distractores importantes: El inciso b en el primero, el c en el segundo y el d en el tercero, en cuya argumentación emerja algún sesgo. Además, se espera que la heurística de equiprobabilidad aparezca en más de uno de estos reactivos como guía para salir de la incertidumbre causada en el estudiante. Eventualmente, también se espera que surjan argumentos que involucren ideas básicas de probabilidad como: azar, espacio muestra, probabilidad e independencia.

Resultados y su discusión

Aunque los argumentos empleados brindan importante información adicional, una tabla que resume las elecciones de los estudiantes al responder a estos reactivos aparece adelante. En ella se observa que los totales no coinciden, lo cual es explicable porque el tercero no se incluyó en todas las baterías de prueba usadas.

		Inciso elegido					Otra		Total
		a	b	c	d	e	Blanco	Indecisión	
o	Reactiv	1	1		7	10		1 ²	20
		2	3	4	2	9		2 ³	20
		3		2	11	1	1		15

Como puede observarse en la tabla, se presenta un porcentaje de respuestas correctas de 45% o más (diez de veinte en el primero, nueve de estos diez en el segundo y once de quince en el tercero), lo cual pareciera no estar tan mal para estudiantes que, en su mayoría, no han tenido una instrucción específica sobre las situaciones que se evalúan. De hecho, sólo en el caso de seis estudiantes se puede asegurar que han tenido tal instrucción por haber realizado sus estudios previos en una institución cuyo programa la incluye.

Observamos que lo pensado inicialmente como distractores no funcionaron como tales, lo cual no deja de revelar un sesgo. Particularmente, al argumentar sus respuestas a los dos primeros reactivos, la gran mayoría de los estudiantes no cambian su razonamiento de uno a otro aunque no necesariamente sea correcto, dando así indicios de posibles sesgos.

Pocas ideas probabilísticas básicas aparecen en las argumentaciones. Hay quienes le asignan $1/5$ a la probabilidad de obtener un águila en un lanzamiento porque se tienen cinco lanzamientos o $3/5$ porque se observan tres águilas en cinco lanzamientos

Muchos otros estudiantes parecieron dispuestos a asignar probabilidad un medio, unos valiéndose del equilibrio de probabilidades y otros de que la moneda tiene sólo dos caras, aunque en muchos casos para apoyar una elección incorrecta. De nueve estudiantes que recurren explícitamente a estas ideas en el primer reactivo y de siete en el segundo, siendo seis comunes, hacen la elección correcta seis y tres, respectivamente.

En las elecciones incorrectas a los reactivos uno y dos, se presentó un tipo de argumento atribuible a la heurística de representatividad, en concreto a una concepción errónea de las secuencias aleatorias como se ha descrito (de nueve estudiantes usando esto, ocho eligieron d en el primer reactivo y a o c en el segundo). Aparece tanto para determinar lo más probable: “*lo probable es alternadas pues de otra forma es más difícil*” o “*varias veces es menos probable*”; como para lo menos probable: “*porque hay menos alternativas*” y “*difícil que saliera tantas posibilidades iguales*”.

Cinco argumentaciones también contienen un reconocimiento a la incertidumbre en la situación, lo que en dos casos lleva a inclinarse por la elección correcta: “*Porque no podemos afirmar que una de las formas será la que ocurra*” y “*ya que no se sabe que va a caer*”. Aquí se percibe un sesgo atribuible a la heurística de equiprobabilidad y, asociado con ésta pero también con la insensibilidad en el tamaño de la muestra, se encontró un uso profuso de un argumento de “equilibrio” aunque sin un sentido a la larga, sentido a lo propio para una probabilidad.

² El estudiante en cuestión señala b y d.

³ Ambos estudiantes señalan a y c, siendo uno de ellos el que quedo indeciso en el reactivo anterior.

En el tercer reactivo nuestra respuesta normativa presupone igual probabilidad en los resultados de un nacimiento pero hubo estudiantes que no consideran este equilibrio entre el nacimiento de un varón y de una mujer. La probabilidad no se proporciona como dato con el fin de no sesgar las respuestas con dicha información y se supuso que la igualdad de probabilidades entre los nacimientos es comúnmente aceptada. En tal perspectiva, dicho “dato” no es admitido por quienes proporcionan el argumento señalado pues se opone a cierta experiencia personal: *“Porque si nos ponemos a observar está claro que la mayoría de la población son mujeres”*.

De los estudiantes que hacen la elección normativa algunos emplean como respaldo un argumento incorrecto, seis de once. Esto lo encontramos asociado a la consideración de que un medio, la probabilidad de nacimiento de un varón, es igual a $5/10$, una fracción de varones en diez nacimientos. Por lo anterior, ya sea que la palabra fracción se tome como alusiva a proporciones, probabilidades o frecuencias relativas, aquel rango de valores que se asocie con la probabilidad de ocurrencia del nacimiento de varones será considerado más probable.

Algunos estudiantes se centran en el valor de la probabilidad de un ensayo al argumentar: *“Porque abarca a un medio y para mi esa es la posibilidad de nacimiento”*, *“es que $5/10$ está en el rango y es igual a la probabilidad de que nazca un varón”*; lo que sería un caso típico donde se aplica la heurística de representatividad.

Otros estudiantes centran su atención en el promedio como característico de lo más probable aunque reconociendo variabilidad probable a su alrededor: *“Puede ... que nazcan 4 niños o que nazcan 6, pero se acercaría a ... que la mitad sean varones”*, *“... está más razonable, ya que está alrededor de la mitad de nacimientos y su probabilidad es mayor”*. Y entre estos estudiantes hay quienes usan también el argumento de la simetría y mayor probabilidad central, inducido a partir de la igual probabilidad de los resultados posibles en cada nacimiento: *“Porque ... no puede inclinarse demasiado de un solo lado”*.

El sesgo de equiprobabilidad, se presenta en al menos dos estudiantes, cuyos argumentos dejan ver que no conciben por completo el espacio muestral en el experimento de observar diez nacimientos y no entienden las expresiones definitorias de los eventos involucrados en los incisos del reactivo, por ejemplo parece⁴ que “mayor o igual a $7/10$ ” se reduce a $7/10$ y “entre $4/10$ y $6/10$ ” a $5/10$. Por otra parte no hay distinción entre la ocurrencia de resultados elementales, por lo que les son igualmente probables, si bien para alguno hay cinco y para otro hay tres.

Conclusiones

Aunque no podemos hacer afirmaciones tajantes sobre la problemática abordada por el estudio, dado que se encuentra en la etapa de exploración, observamos que sí es previsible encontrar en los estudiantes modos de razonamiento que interfieran en su aprendizaje de las ideas básicas de Probabilidad y Estadística. Es notorio que las ideas encontradas entre los estudiantes no les bastan para arribar al argumento normativo cuando no se cuenta con una visión completa del espacio muestral ni se cuenta con la noción de independencia, menos aún cuando interfieren heurísticas como las señaladas.

⁴ Posiblemente otros estudiantes hagan lecturas como éstas.

La presencia de heurísticas de representatividad y de equiprobabilidad ha sido mostrada pero, señalando que no se presentan de forma única ni son las únicas explicaciones a errores como los observados, es necesario profundizar en su estudio. De hecho, también es necesario extender el estudio a otras heurísticas y sesgos detectados para ubicar su presencia en nuestro medio y poder tomar medidas en la enseñanza.

Referencias

- Kahneman, D.; Slovic, D.; Tversky, A.: 1982, Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. Cambridge University Press.
- Konold, C.: 1991, Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.
- Lecoutre, M.P.: 1992, Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. Educational Studies in Mathematics, 23, 557-568.
- Pérez Echeverría, M.P.: 1990, Psicología del razonamiento probabilístico. Madrid. Universidad Autónoma.
- Serrano, L.; Batanero, C.; Ortíz, J.J.; Cañizares, M.J.: 1998, Heurísticas y Sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. Educación Matemática, No. 1, vol. 10, págs. 7-25. México.