Nivel Superior

CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS Y DE ESTRUCTURAS COGNITIVAS[1]

Fernando Hitt
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México

Resumen

El desarrollo de habilidades y entendimiento han sido analizados en el pasado como entes separados. En la actualidad se les estudia desde un punto de vista global en relación a la construcción de conceptos. Las nociones de esquema y representaciones internas y externas no son de reciente creación, sin embargo, posiblemente por el desarrollo tecnológico aumentó el uso de representaciones gráficas y figurales, esas nociones se empezaron nuevamente a analizar y a relacionar con aspectos teóricos actuales como son los sistemas semióticos de representación y sus implicaciones en la articulación entre representaciones internas.

Introducción

Las investigaciones en educación matemática en su búsqueda para entender cómo se construye el conocimiento han motivado el estudio del papel que juegan las representaciones semióticas y los procesos semióticos en la construcción de ese conocimiento. Ello ha implicado que se retomen los trabajos sobre la idea de signo y se han integrado a nuevas teorías que tienen que ver con la construcción de redes internas en los individuos ligados al conocimiento en cuestión.

La noción de esquema y la construcción de conceptos

A continuación presentamos la noción de esquema desarrollada por Skemp (1971) y que quedaron plasmadas en su libro *"The Psychology of Learning Mathematics"*. Skemp escribió sobre la construcción de conceptos en general y de la construcción de conceptos matemáticos en lo particular. Parte de lo desarrollado por él es lo siguiente:

> *"…Consideraremos a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales, llamadas esquemas…*
> ***Abstrayendo** y **clasificando**. En un nivel bajo, nosotros clasificamos cada vez que reconocemos un objeto,… De estas variaciones abstraemos ciertas propiedades invariantes, y estas propiedades persisten en la memoria más allá del recuerdo de una presentación particular del objeto.*

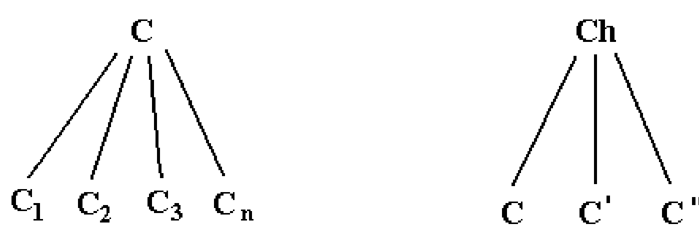


Figura 1

[1] Una versión preliminar de este trabajo se presentó en el Working Group: *Representations and mathematics visualization* del PME-NA, Tucson, Arizona, 2000, pp. 131-147.

Abstraer *es una actividad por medio de la cual llegamos a ser conscientes de similitudes (en la práctica diaria).*
Clasificar *significa juntar nuestras experiencias sobre las bases de estas similitudes.*
Un concepto *entonces requiere para su formación cierto número de experiencias las cuales tienen algo en común.*
Un concepto *es un objeto puramente mental."*

Es bien sabido que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a esos objetos. Por tal motivo, es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático.

El trabajo de Hiebert & Carpenter (1992), nos explica esas ideas dentro del marco teórico de las redes formadas por representaciones internas, generadas por la manipulación de representaciones externas. Por ejemplo, en la siguiente cita de Hiebert & Carpenter (idem, p. 67), se ha transformado la idea de esquema de Skemp en la idea de red, bajo la siguiente explicación:

"Comprensión*: Iniciamos definiendo comprensión en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento o hecho es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento, o hecho es entendido profundamente si éste está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones"*.

Construcción de conceptos desde una teoría de los sistemas semióticos de representación

Los estudios experimentales de Duval (1988, 1993, 1995), que involucran por un lado los problemas de manipulación de representantes dentro de un sistema matemático de signos y sobre los problemas de conversión de representaciones entre dos o más sistemas de un mismo objeto matemático, ha generado una nueva noción que es la de Registro de representación, cuya idea está totalmente ligada a las funciones esenciales para toda actividad cognitiva. Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: "un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

1) *La presencia de una representación identificable...*
2) *El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...*
3) *La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...*

Sobre la construcción de conceptos matemáticos Duval (idem, p. 46) establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, debemos considerar como absolutamente necesario la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

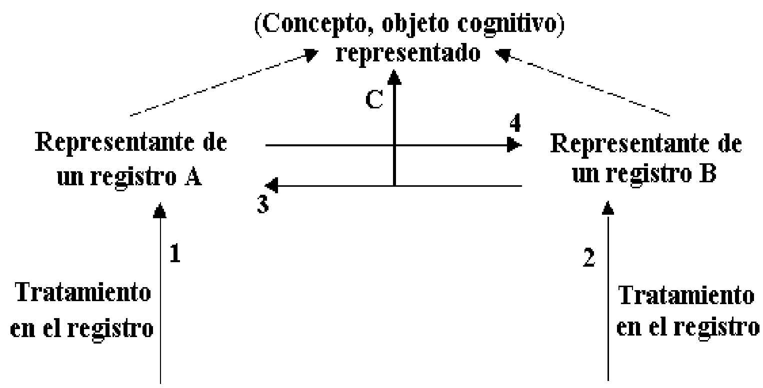


Figura 2. Modelo de la representación centrado en la función de objetivación. Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integradora de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros.

El acercamiento de Duval recupera dos aspectos teóricos importantes desarrollados por Piaget y Skemp. En este contexto, la adquisición de un concepto en un individuo se dará en el momento que haya una coordinación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones del objeto matemático. Debemos señalar que bajo este punto de vista siempre el concepto estará en construcción.

Otro punto de vista en relación a la misma problemática es el de Hiebert y Carpenter (idem, p. 74), ya que ellos afirman que:

> …*Mientras más estructurada esté la red, menos piezas sueltas se extraen separadamente. Recordar una parte de la red implica el recuerdo en su conjunto de la red, reduciendo el número de items aislados que deben ser recordados.*

Los autores antes citados nos centran en la discusión de la importancia de las representaciones semióticas, en su interacción y su potencialidad al construir redes que conecten conocimiento. A continuación nos proponemos discutir sobre las dificultades en la construcción de esas redes de conocimiento matemático y en su articulación por parte de los estudiantes.

Dificultades en la articulación entre representaciones

El acercamiento de Tall y Vinner (1981, p. 151) y Vinner (1994, pp. 68-69) acerca de las nociones de "Concept image and concept definition", proporcionaron un acercamiento sobre la construcción de conceptos matemáticos. Ellos los definían de la siguiente manera:

> *Concepto imagen*
> *El nombre de un concepto cuando es nombrado o visto u oído es un estímulo para nuestra memoria. Algo es evocado por el nombre del concepto en nuestra memoria. Usualmente no es la definición del concepto, aún y cuando el concepto tenga una definición.*
> *El concepto imagen es algo no-verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto, en caso de que el concepto*

cuente con una representación visual; también puede ser una colección de impresiones y de experiencias asociadas con el nombre del concepto que puede ser traducido en su forma verbal. Pero es importante recordar que estas formas verbales no fueron la primera evocación en nuestra memoria. Ellos se constituyeron solamente a través de un largo recorrido.

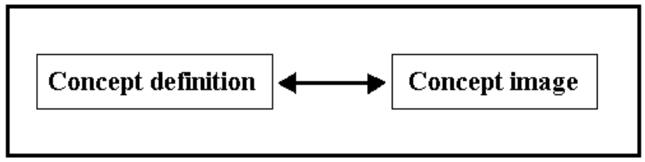


Figura 3

Tall y Vinner a través de sus investigaciones nos mostraban una interpretación de la imagen conceptual construida por los estudiantes. Aunque este acercamiento nos centraba en la importancia de las conexiones, los aspectos de proceso y de conversión entre representaciones no fueron explicitados por ellos.

En otros trabajos (ver Tall & Thomas, 1989; Bakar & Tall, 1991) ellos describen la noción de organizadores genéricos (Tall & Thomas, p. 118): *"Ellos tienen como propósito ayudar al aprendiz en la abstracción del concepto más general tratado por los ejemplos"*. Consideran de vital importancia el uso de contra-ejemplos, sobre esto, Bakar & Tall (idem, pág. 104) señalan: *"Nuestra hipótesis es que los estudiantes desarrollan 'prototipos', tales como una función es como $y = x^2$, o un polinomio, o 1/x, o una función senusoidal. Cuando se les pregunta que si una gráfica es una función, en ausencia de una definición operativa, la mente intenta responder razonando con prototipos mentales"*. En el caso concreto de las funciones, no solo los alumnos construyen "prototipos" en Hitt (1994,1998) podemos apreciar que los profesores de matemáticas también tienen problemas con el concepto de función.

Lo que queremos enfatizar aquí es que no solo es importante las tareas de transformación dentro de un registro de representación y los de conversión entre registros, se revela importante además, la confrontación entre ejemplos y contra-ejemplos. Podríamos señalar entonces que un mejor diagrama que integra lo anterior es el de la Figura 4.

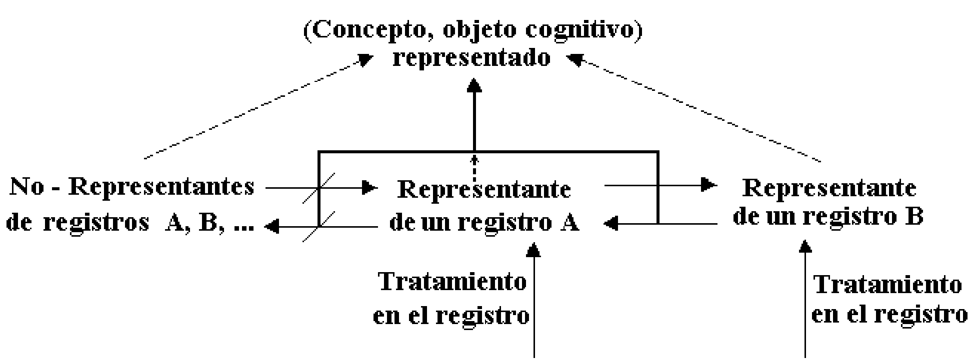


Figura 4

Regresando a los sistemas semióticos de representación, y todavía más importante, a los registros de representación, ellos deben ser analizados bajo estos supuestos teóricos. Tomemos por ejemplo, el registro gráfico, y supongamos que queremos analizar los problemas del paso de la representación gráfica de las funciones lineales de los reales en los reales a sus expresiones algebraicas. El trabajo de Duval (1988) nos explica que la dificultad del paso de la representación gráfica a una ecuación (el trabajo de Duval es sobre rectas en el plano y el paso a ecuaciones) tiene que ver con el desarrollo de la habilidad para distinguir las variables visuales que entran en juego en la resolución de un ejercicio como el de pasar de la gráfica de una recta a la ecuación.

Lo que queremos enfatizar aquí, es que un solo concepto es analizado desde la perspectiva de los registros de representación y si un alumno comete errores, se debe intentar explicar cada uno de esos errores en ese contexto teórico. Entonces, para el registro gráfico cobra singular importancia el análisis cuidadoso de las variables visuales (Duval, 2000) que entran en juego para poder entresacar información relevante de una gráfica y poder asociar esta información con su correspondiente en el registro algebraico.

Veamos un ejemplo relativo a la problemática de las representaciones gráficas y figurales. En una experimentación realizada con profesores de matemáticas (nivel medio superior, ver Hitt, 1995), se les solicitó dibujar un recipiente el cual estuviera lleno de un líquido de tal manera que se le pudiera asociar una gráfica determinada (ver Figura 5).

Gráfica proporcionada a los profesores   Respuesta de un profesor

Figura 5

Como lo señalamos en Hitt (1995), la primacía de la intuición global sobre el pensamiento analítico no le permitió al profesor realizar un razonamiento ad hoc para dar una respuesta satisfactoria. Sin embargo, en otro ejercicio donde se solicitaba una tarea de conversión en el otro sentido (paso de un dibujo de un recipiente a gráfica), el comportamiento del mismo profesor fue totalmente diferente (ver Figura 6).

Transcripción fiel de lo realizado por el profesor

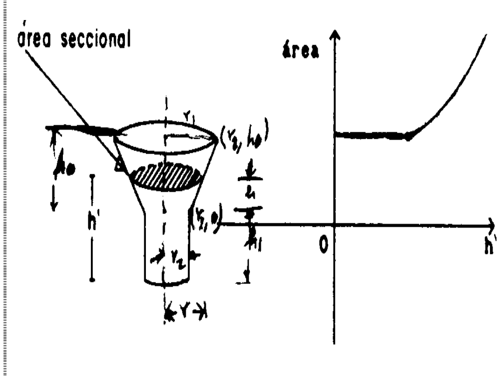
Proceso algebraico	Se proporcionó recipiente y ejes
$h=\frac{h_0-0}{r_1-r_2}=\frac{h_0}{r_1-r_2}(r-r_2)$ $h=m(r-r_2)=mr-mr_2$ $r=\frac{h+mr_2}{m}=\frac{1}{m}h+r_2$ $Area=S=\pi r^2=\pi(\frac{1}{m}h+r_2)^2,\ h\in[0,h_0]$ $h'=h_1+h=h_1+mr-mr_2$ $r=\frac{h'-h_1+mr_2}{m}=\frac{1}{m}h'+\left(\frac{mr_2-h_1}{m}\right)$	

Figura 6

Notemos que hay un buen entendimiento de los sistemas semióticos en juego; sin embargo, en el primer caso (Figura 5) hay un error en la conversión de un sistema al otro. ¿Por qué en el segundo caso se impuso el pensamiento analítico sobre el intuitivo? Este ejemplo muestra que la articulación entre representaciones no se da de manera natural.

Consideramos que algunos de los aspectos que faltan dentro del marco teórico de Duval pueden ser completados analizando el trabajo de Hiebert y Lefevre (1986, pp. 3-6), acerca de las nociones de “conceptual and procedural knowledge”. En términos del papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas, ellos señalan:

Conocimiento conceptual es caracterizado claramente como conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento.

Conocimiento procedimental es construido por dos partes. Una se compone del lenguaje formal, o del sistema de representación simbólico, de las matemáticas. La otra parte consiste de algoritmos, o reglas, para completar tareas matemáticas. En resumen, conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una clase de conocimiento procedimental consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos. La segunda clase de conocimiento procedimental consiste de reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Aquí parece haber una idea complementaria al trabajo de Duval y que tiene que ver con las acciones que los individuos realizan con la manipulación de las representaciones al resolver un problema matemático. Un aspecto importante que no dejan de lado Hiebert y Lefevre (idem) relativo a las dificultades que los estudiantes tienen en la resolución de un problema matemático es que el conocimiento adquirido por un estudiante está contextualizado, ellos afirman: *“El conocimiento contextualizado no busca pero necesita de relaciones fuera del contexto.”*

Si el conocimiento se adquiere en un contexto dado, entonces ¿cómo se hace presente la transferencia de conocimiento cuando el estudiante se enfrenta a un problema? ¿es fácil detectar la transferencia de conocimiento en la experimentación educativa?

A continuación presentamos una cita de Perkins y Salomon (1989, p. 22), en relación con diferentes estudios realizados con la finalidad de detectar la transferencia de conocimiento:

> *"En resumen, investigación reciente y teoría concerniente a la transferencia pone los resultados negativos citados anteriormente bajo un nuevo lente. Estos resultados no implican que la gente tiene poca habilidad para realizar un proceso de transferencia o que un conocimiento está enteramente contextualizado. Más bien, los resultados negativos reflejan el hecho de que la transferencia ocurre solamente bajo condiciones específicas las cuales frecuentemente no son encontradas en la vida común o en experimentos de laboratorio… Cuando las condiciones se satisfacen, transferencia útil de un contexto a otro ocurre frecuentemente".*

La noción de transferencia

El trabajo de Schoenfeld (1999), también en relación con la transferencia, menciona el mismo problema sobre la dificultad de detectar cómo se produce la transferencia de conocimiento, él señala:

> *La pregunta central aquí es: ¿Cómo encontrarle sentido a las maneras en la cuales la gente usa su conocimiento en circunstancias diferentes de las circunstancias en las cuales el conocimiento fue adquirido?*

> *"La transferencia está en todos lados (es ubiquitous). No podríamos sobrevivir si no fuéramos capaces de adaptar lo que sabemos a circunstancias que difieren, al menos en cierto grado, de las circunstancias en las que se aprendió. …El punto clave es deducir qué transferencias se dieron, sobre qué base y cómo y por qué esas conexiones a veces son productivas".*

Hiebert and Lefevre (idem, p. 11) señalan:

> *"…Hay razones para creer que además de aumentar la memoria para los procedimientos, relacionando conocimiento procedimental y conceptual facilita el uso efectivo de los procedimientos. Esto puede ocurrir en al menos tres diferentes formas. Si el conocimiento conceptual está ligado a los procedimientos puede; (a) aumentar las representaciones de problemas y simplificar las demandas procedimentales; (b) monitorear la elección de procedimientos y su ejecución; y (c) promover la transferencia y reducir el número de procedimientos requeridos".*

Bajo los aspectos teóricos que estamos tratando, entonces cobra una relevancia la noción de transferencia, que se muestra esencial en el terreno de la resolución de problemas. Hiebert y Carpenter (idem, p. 76-77), señalan lo siguiente:

> *"La estructura que proponemos retiene la noción de representación interna. De hecho, proponemos que de acuerdo a la manera como las representaciones internas están conectadas ayuda a explicar la potencialidad para la transferencia. Pero, nosotros también sugerimos que las situaciones de cada problema en las que los estudiantes se*

comprometen influyen en la naturaleza de las representaciones internas y sus conexiones a otras representaciones. En otras palabras, la situación o contexto influye en la cantidad de transferencias que realmente ocurren".

En la enseñanza de las matemáticas la gran mayoría de los profesores continúan privilegiando al sistema de representación algebraica sin considerar que las investigaciones en torno al aprendizaje apuntan al equilibrio que se le debe otorgar al uso de las diferentes representaciones en la construcción de conceptos y la resolución de problemas. Esta tendencia posiblemente en forma inconsciente pareciera que ha influido en los alumnos y por ello no cuentan con apoyos que les permitan construir conexiones.

Veamos un ejemplo que muestre lo que queremos explicitar acerca de la importancia de las producciones semióticas producidas por los estudiantes que no necesariamente coinciden con las que el profesor utiliza en el aula. Lo siguiente es en relación a un estudio Colombiano (ver Benitez y Santos, 2000) sobre *"Métodos de solución de problemas que generan sistemas de ecuaciones 2×2 utilizados por estudiantes de Básica Primaria, Básica Secundaria y Media Vocacional en el Municipio de Mariquita".* El estudio consistió en proponerles a alumnos de diferentes niveles los mismos problemas. Soath (niña de 11 años de edad) desarrolló el siguiente procedimiento (ver Figura 7) para llegar a la solución del problema: *En una competencia Manuel contó 25 vehículos, mientras que Carlos contó 70 llantas. Si entre los vehículos había taxis y motos, ¿Cuántos taxis y cuántas motos había en la competencia?*

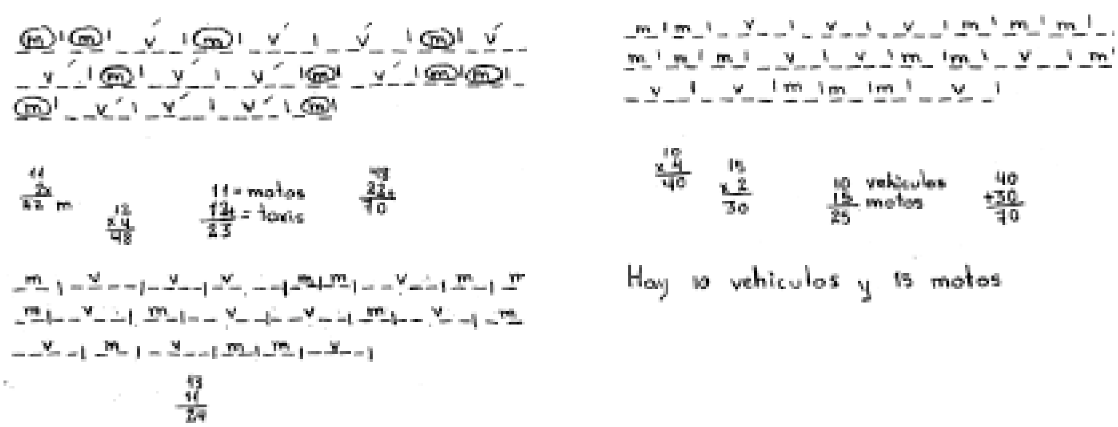


Figura 7

La alumna ha utilizado diferentes representaciones que le han permitido llevar un control al ir profundizando en su método para resolver el problema. Es notorio el control sobre el número de llantas (70), pero esta representación particular, le proporcionó 23 vehículos. En su segundo dibujo, ya tiene en mente el caso general, ya que, además de conservar el control sobre el número de llantas, Soath está interesada en controlar el número de motos y de taxis. De hecho, intercambia un taxi por dos motos. Su atención está puesta en controlar el número de vehículos y no tanto en el orden en que terminaron la carrera. Desde su segunda representación ésta está jugando un papel más general que la primera. Su tercera representación figural le permite estar segura del resultado final encontrado en su proceso aritmético.

De acuerdo a las consideraciones teóricas que mencionamos, el papel de la representación figural jugó un papel preponderante apoyando a cada momento los procesos aritméticos desarrollados por esta niña. Es notoria la articulación entre las diferentes representaciones que ella utilizó.

Analicemos lo desarrollado por un estudiante de enseñanza Media Básica (Figura 8), Alvaro de 14 años, quien estaba llevando en ese momento un curso de álgebra.

El primer problema del alumno es que su asignación de la incógnita sobre el número de motos y número de taxis no es adecuada, ya que para ambos vehículos utilizó la misma incógnita. El siguiente problema inmediato es que proporcionó una relación inadecuada entre los datos: $70+4x=25$. ¿En qué estaría pensando el alumno cuando escribió esa relación? Este estudiante en una entrevista posterior mencionó que esa relación era porque ¡4x representaba a los vehículos! El problema que queremos subrayar es exactamente el que se refiere a la escritura de las relaciones explícitas entre incógnitas y datos. Lo desarrollado por este estudiante parece indicar que perdió todo el control al pasar del enunciado expresado en lenguaje natural a su representación algebraica.

El estudiante a diferencia de la alumna, no cuenta con un referente concreto y una estructura que valide las implicaciones que desarrolla al intentar resolver el problema. Una estructura que le permita contar con algún grado de control de la situación, una estructura epistmética en el sentido de Perkins y Simmons (1988, p. 305), ellos dicen: "*Estructura epistémica: Esta estructura incorpora dominio específico, normas generales y estrategias concernientes a la validación de afirmaciones en el dominio. Dentro de un dominio bien desarrollado, los 'hechos' en la estructura de contenido son validados a través de las normas de la estructura epistémica…*"

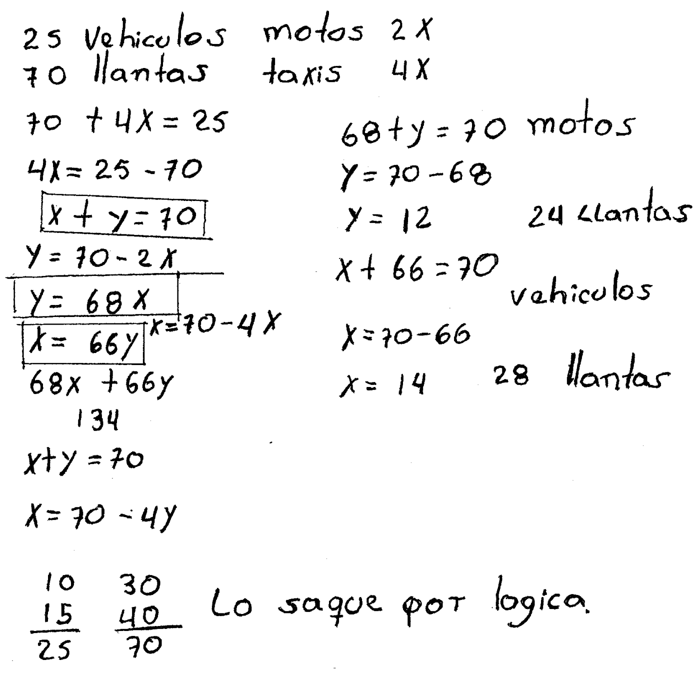


Figura 8

Las contradicciones a las que el alumno ha llegado y que no parece que resolviera, nos permite inducir que este alumno no ha desarrollado esa estructura epistémica mencionada por Perkins y Simmons (1988) que le permita seguir un proceso algebraico coherente. Las representaciones algebraicas utilizadas por el alumno no tienen un vínculo correcto con sus interpretaciones. Por ejemplo, con la expresión $x + y = 70$, el estudiante en la entrevista señala que x representa el número de taxis, y que y representa el número de motos. Pero también ha utilizado a 2x como número de motos. Esto queda de manifiesto cuando al aislar la incógnita y, sustituye a -x por -2x. Es decir que pasa de una relación a otra que él considera equivalente sin darse cuenta que eso es falso. Este estudiante comete errores de corte aritmético cuando realiza las substracciones 70 - 68 y 70 - 66. El estudiante en la entrevista al preguntarle que explicara cómo le hizo para obtener el resultado correcto, mencionó que lo que escribió al último se lo había copiado a su compañero. Es notorio que este estudiante no ha logrado desarrollar una estructura que le permita monitorear y validar sus acciones al manipular representaciones de contenidos matemáticos.

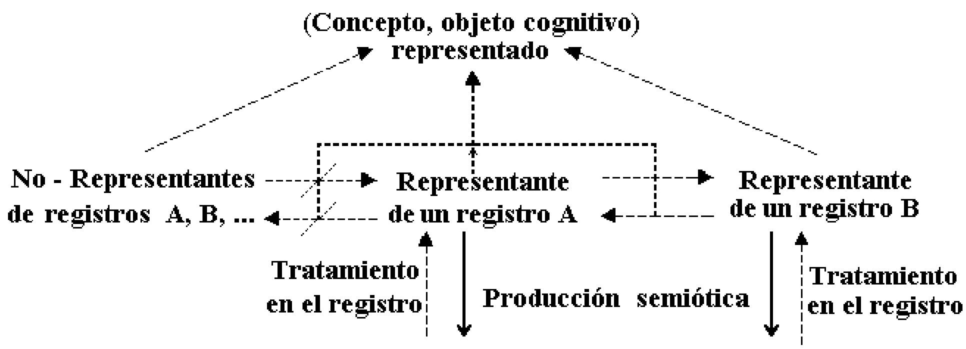


Figura 9

Los puntos tratados en este apartado nos señalan que no solo es importante la construcción de conceptos matemáticos, sino también estructuras más generales que le den mayor soporte a los conceptos matemáticos que el alumno está construyendo. El desarrollo de una estructura epistémica es la que posiblemente le proporcione a los alumnos ese ‘insight’, sensibilidad a las contradicciones, elección adecuada de procesos, etc., necesarias en la resolución de problemas.

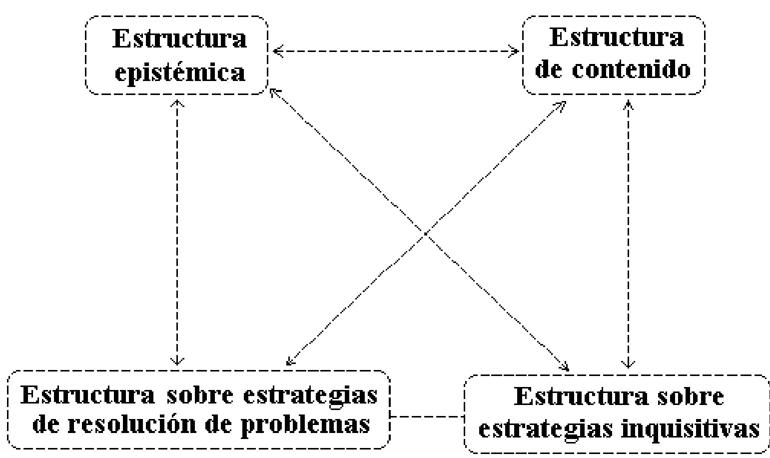


Figura 10

Sobre la construcción de conceptos y de resolución de problemas

No debemos olvidar que no basta con proponer actividades de conversión para pasar de una representación de un sistema de representación a otra representación de otro sistema, para que un alumno de manera natural construya ese puente (articulación) entre representaciones. Hiebert y Lefevre (idem, p. 18) señalan que existe una tendencia en los estudiantes a compartamentalizar el conocimiento: *"Un tercer factor general que parece impedir la construcción de relaciones entre unidades de conocimiento es que el conocimiento recientemente adquirido está contextualizado."*

Entre las explicaciones que proporcionan algunos de los autores mencionados en este documento, la construcción inadecuada de un concepto se pudiera deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación. Pero, al analizar el trabajo de estos autores relacionados con los sistemas semióticos de representación, un aspecto que no es claro es el lugar del error cuando se trata de un obstáculo de corte epistemológico o didáctico. Relativo a esto, Brousseau (idem, P. 84) señala:

> *"Un obstáculo se manifiesta, por lo tanto, por sus errores, pero ellos no son debidos al azar. Fugaces, erráticos, son reproducibles, persistentes. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo, no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos".*

Las construcción de conocimiento que implica desempeños erróneos crea, en este contexto, esquemas o conexiones permanentes que se contraponen a la construcción adecuada de cierto concepto. Nuestra opinión es que esos esquemas no desaparecen, aún y cuando se construya un esquema alternativo. En algunos casos, esos esquemas resurgirán de manera que un individuo puede repetir ese error que prevalecía en el pasado, cuando se le presenta una actividad más compleja. Por ejemplo, en actividades con profesores se les solicitó que desarrollaran lo siguiente: Calcular $\left(5^x + \tan(x)\right)^3 =$. En tres casos de entre 29, cometieron un error al utilizar la siguiente igualdad en forma inmediata $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

Podemos, en resumen, señalar que unificando los aspectos teóricos aquí tratados, un modelo más completo sería el que se muestra en la Figura 11.

En el contexto teórico que estamos tratando, la instrucción deberá promover mejores conexiones (articulaciones) entre representaciones de manera que la red interna, alterna a la ya existente ligada al obstáculo que se esté formando en el individuo le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado y señalado como obstáculo cognitivo y/o epistemológico. Un ejemplo sobre la noción de obstáculo epistemológico relativo al concepto de función y con profesores de matemáticas de enseñanza media se puede ver en Hitt (1994, 1998).

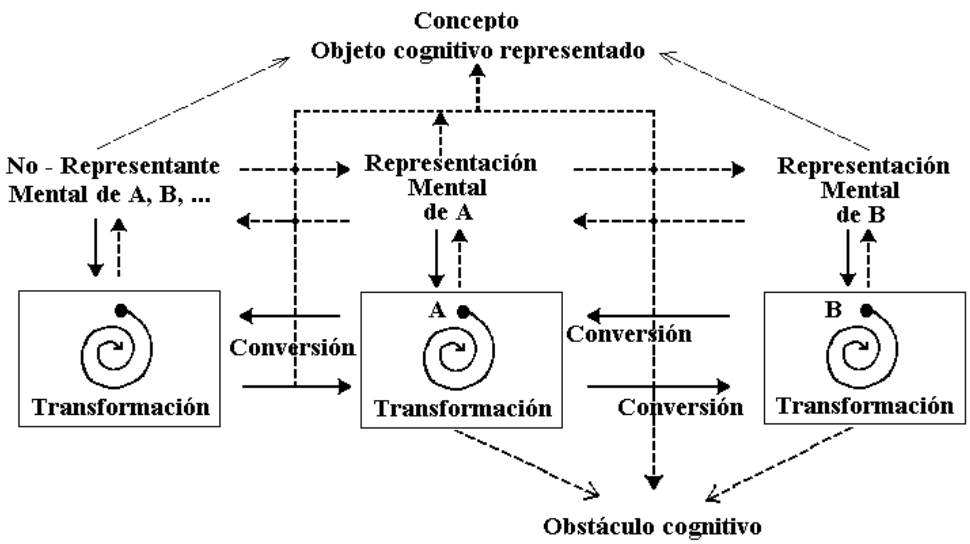


Figura 11

Necesidad de construir estructuras cognitivas para el entendimiento

En la resolución de problemas es donde se pone a prueba todo el conocimiento del estudiante. Como lo hemos señalado, es posible que el estudiante haya construido dos esquemas que son incompatibles, y que cuando el estudiante está frente a una tarea compleja resurjan esas concepciones mal formadas produciendo un mal desempeño. La instrucción jugará un papel importante en la construcción de un esquema más apropiado. Pero, las incoherencias existentes entre un esquema y el otro son conflictos internos al individuo que tendrá que resolver poco a poco. Algunos esquemas que tienen que ver con la noción de obstáculo epistemológico y que permitan sobrepasarlo, serán más difíciles de construir. La construcción correcta tiene que ver con una red de conocimientos más amplia y coherente que opaca a la vieja construcción en términos de que esta nueva construcción puede ser más fácil de recordar por la amplitud de su red. Tal amplitud tendrá que ver también con la articulación entre representaciones de un concepto. Ello no querrá decir que el otro esquema desaparezca totalmente. Además, no es fácil poder detectar cuándo un individuo se ha percatado de una incoherencia y la ha resuelto adecuadamente. Estos procesos internos no parecen ser directamente detectables. Se desarrollan en el individuo en intervalos más largos de tiempo y seguramente en momentos que no son cuando están en el aula o en un laboratorio.

Desde el punto de vista de Perkins y Simmons (1988) los malentendidos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con la falta de estructuras cognitivas que no permiten al estudiante realizar las conexiones necesarias en la resolución de un problema o en ir más allá de un problema resuelto. Estas estructuras cognitivas están en relación directa con el entendimiento. Perkins y Simmons (1988, p. 305) designan estas estructuras como: *Estructuras de conocimiento de contenido, también conocimiento en la resolución de problemas, epistémico, e inquisitiva*. Señalan también (idem, p. 319 y 320) que la instrucción en matemáticas está muy ligada a la construcción de la estructura de contenido y últimamente a la de resolución de problemas, descuidando la construcción por parte del estudiante, de las estructuras epistémica e inquisidora: *Hemos argumentado que el aprendizaje con entendimiento depende sobre las cuatro estructuras y de sus interrelaciones… Las estructuras de resolución de problemas y de contenido son el foco de la mayor parte de la instrucción en el aula.*

El ejemplo que mostramos en el caso de Soath (niña de 11 años) está ligado al contexto teórico que queremos resaltar de Perkins y Simmons (1988). Veamos otro ejemplo alrededor de esa teoría. Una pareja de alumnos discutían un ejercicio de geometría analítica: $(x-3)^2+(x-2)^2=9$. La alumna le explicaba a otro alumno algunos conceptos algebraicos:

Alumno de enseñanza media (18 años): $(x-3)^2=x^2-9\,x$

Alumna de enseñanza media (18 años): Es incorrecto, ¿qué no te sabes la fórmula $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ *? Si no recuerdas esa fórmula hay varias maneras de realizar ese cálculo, por ejemplo:* $y^2=y*y$ *, o sea* $\left(x-3\right)\left(x-3\right)=x^2-3x-3x+9$ *, o por medio de la multiplicación usual, que es* $\begin{array}{r} x-3 \\ \times\ \ x-3 \\ \hline \end{array}$ *.¿Qué prefieres?*

Alumno: La fórmula ya que es más fácil.

Este ejemplo nos muestra con claridad la diferencia entre la estructura de contenido (“…*te sabes la fórmula…*”) y la epistémica (“…*hay varias maneras de realizar ese cálculo…*”) en el sentido de Perkins y Simmons (1988, p. 305). En relación a la estructura epistémica, ellos mencionan: “*Esta estructura incorpora dominio de normas específicas y generales además de estrategias concernientes a la validación de afirmaciones en el dominio. Dentro de un dominio bien desarrollado, los “hechos” en la estructura de contenido son válidados por medio de las normas establecidas en la estructura epistémica…*”

El alumno no ha construido esa estructura epistémica que le permita validar su conocimiento de la estructura de contenido. La alumna de enseñanza media parece que sí ha construido esa estructura epistémica ya que tiene varias maneras de comprobar el resultado de elevar un binomio al cuadrado.

Siguiendo los trabajos de Perkins y Simmons (1988) y Perkins y Salomon (1989), podemos inferir que una parte sobre la construcción de conceptos puede estar ligada a la teoría de los sistemas semióticos de representación como Duval la presenta, pero no sería suficiente en el contexto de la construcción de estructuras cognitivas más generales como la epistémica.

Reflexiones finales

Hemos visto que las investigaciones de Hiebert y Lefevre (1986), Hiebert y Carpenter (1992) junto con las de Duval (1993, 1995), han permitido una nueva orientación teórica sobre la importancia de los sistemas semióticos de representación en la construcción de conceptos. Las investigaciones de Duval se apegan al trabajo de Saussure, complementando las nociones de representación y construcción de conceptos desarrolladas por Piaget y Skemp. Tomando en consideración los lineamientos teóricos de Duval (idem), hemos visto que los registros de representación, bajo la promoción de articulaciones entre representaciones de esos registros, nos explican la construcción de conceptos matemáticos. Ello como consecuencia de que las representaciones de los objetos matemáticos son parciales con respecto a lo que representan. Es decir, que es absolutamente necesario contar con actividades de conversión en por lo menos dos registros de representación para que las representaciones en juego, que por su naturaleza son complementarias, proporcionen un soporte a la construcción del concepto en cuestión. Por ejemplo, en el caso de la construcción del concepto de función entran en juego el registro de representación de la lengua natural, el de las expresiones algebraicas, tabulares, gráficas y figurales.

Contrastando el trabajo de Hiebert y Lefevre (1986) con el de Duval (1993, 1995) vemos que desde el punto de vista de la resolución de problemas, cobra nuevamente una importancia enorme la construcción de una red de conocimiento que pueda permitir a los alumnos interaccionar entre su conocimiento conceptual y el procedimental. Aquí, no estamos pensando en el camino directo que generalmente se sigue al resolver un ejercicio sino en las características señaladas por los investigadores del "problem solving".

Los acercamientos anteriores dan cuenta de la construcción de conceptos bajo ese contexto teórico. Un aspecto que todavía está en desarrollo es sobre el papel de la idea de transferencia en la resolución de problemas. Esta noción teórica es importante poder analizarla desde el punto de vista que se ha tratado dentro del documento. Una posible vía de investigación es la señalada por Perkins y Simmons (1988) y Perkins y Salomon (1989) sobre la construcción de las estructuras de contenido, de resolución de problemas, la epistémica y la inquisitiva.

También hemos querido enfatizar que bajo los supuestos teóricos a los que nos hemos restringido implican que el análisis de errores no se puede hacer en forma aislada. Incluso, la valoración sobre el conocimiento de los estudiantes implica bajo este marco teórico que debe ser analizado sobre actividades que intenten esclarecer sobre las posibles conexiones (articulaciones) realizadas por los estudiantes durante la construcción de algún concepto dado. La valoración es más holística que puntual, por tal motivo, el error se debe estudiar desde diferentes puntos de vista y diseñar actividades para detectar la naturaleza del mismo. Un ejercicio o problema no es suficiente. Bajo estos supuestos teóricos el diseño de actividades de conversión entre registros de representación y el análisis de los comportamientos de los estudiantes podrán proporcionar elementos para entender qué construcción sobre un concepto dado ha realizado un estudiante.

Referencias

Bakar M., & Tall D. (1991) Students' mental prototypes for functions and graphs. Proceedings PME XV (F. Furinghetti Editor), Assisi, Italy, pp. 104-111.

Benítez D. & Santos M. (2000) El uso espontáneo de representaciones y la importancia de las estrategias metacognitivas para el entendimiento y solución de problemas. En Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario (F. Hitt editor). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, pp. 151-166.

Brousseau G. (1976) Les obstacles épistémolgiques et les probèmes en mathematiques. Comptes-rendus de la XXVIII rencontre de la CIEAEM, pp. 101-107, Belgique.

Brousseau, G. (1997) Theory of Didactical Situations in Mathematics. 1970-1990, (Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V., translators and editors), Dordrecht, Kluwer.

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Antología en Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval R. (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Hiebert J. & Lefevre P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics (James Hiebert, Ed.). Lawrence Erlbaum, Associates, Publishers, pp. 1-28.

Hitt F. (1994) Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 16, No. 4, pp. 10-20.

Hitt F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior, **17** (1), pp. 123-134.

Perkins D., and Salomon G. (1989) Are Cognitive Skills Context-Bound? Educational Researcher, Vol. January-February, pp. 16-25.

Perkins D., and Simmons R. (1988) Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. Review of Educational Research, Vol. 58, pp. 303-326.

Schoenfeld A. (1999) Looking Toward the 21st Century: Challenges of Educational Theory and Practice. Educational Researcher.

Tall D., & Thomas M. (1989) Versatile Learning and the Computer. Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 11, Number 2, pp. 117-125.

Tall D., & Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, pp. 151-169.

Vinner S. (1994) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In Advanced Mathematical Thinking (David Tall Ed.). Kluwer Academic Publisher.