SOBRE LOS TRIÁNGULOS COJOS

Francisco Javier Hernández Patiño
Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Resumen

El teorema de Pitágoras es un teorema de geometría, pero en ocasiones nos interesan otras cuestiones que se derivan de él, por ejemplo para construir un triángulo rectángulo cuyas medidas sean números naturales, es preciso saber qué números naturales satisfacen el teorema, entonces nuestro problema pasa de ser geométrico a algebraico. Aquí lo que nos interesa es algo similar, como saber con que números naturales podemos construir triángulos rectángulos cuya diferencia de catetos (con valores naturales) sea la unidad; estos son los llamados triángulos cojos. Así que se desarrollará una forma algebraica para poder obtener estos triángulos.

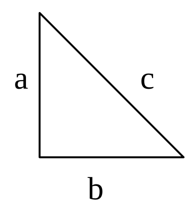
Sobre los triángulos cojos

El teorema de Pitágoras, además de ser uno de los teoremas mas conocidos, ha jugado un papel importante en la historia de las matemáticas. Con él podemos calcular la norma de un vector, la distancia entre dos puntos en el plano y en el espacio, a partir de él se puede demostrar que $2^{1/2}$ es irracional, etc.

El teorema puede ser enunciado de la siguiente forma: En todo triangulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Y la ecuación es

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

donde a y b son los catetos y c la hipotenusa.



Como podemos darnos cuenta, lo anterior significa que dados tres valores a, b y c, podemos construir un triángulo rectángulo, a condición que satisfagan la ecuación (1). Esta ecuación puede ser satisfecha tanto por números naturales como por números no naturales, por lo tanto sólo estudiaremos los valores de a, b y c que sean números naturales. Veamos ejemplos de números naturales que satisfacen la ecuación (1):

3, 4 y 5;	$3^2 + 4^2 = 5^2$
5, 12 y 13;	$5^2 + 12^2 = 13^2$
7, 24 y 25;	$7^2 + 24^2 = 25^2$

etcétera.

Por lo tanto, con las ternas de la columna de la izquierda podemos construir triángulos rectángulos. Además es fácil obtener ternas Pitagóricas, se calculan con las siguientes formulas:

$$x^2 - y^2 \qquad 2xy \qquad x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Existe una “especie” de triángulos rectángulos con una propiedad muy curiosa, son los triángulos cojos; Simon Singh en su libro EL ENIGMA DE FERMAT define los triángulos cojos como los triángulos rectángulos cuya diferencia de cateos es la unidad. De esta definición observamos que de la columna izquierda sólo el primer ejemplo es un triángulo cojo. Sin embargo, Simon Singh nos ofrece otro ejemplo en su libro: 20, 21 y 29, que como podemos ver es fácil demostrar que es un triangulo rectángulo. Pero este último es el único ejemplo que ofrece Singh en su libro, no dice como se obtienen, de hecho no dice si existen más. Otros libros sólo tienen una lista de ternas Pitagóricas pero no mencionan los triángulos cojos.

Como Simón Singh ofrece un sólo ejemplo, y la bibliografía a mi alcance no habla de ellos, me dediqué a estudiar estos triángulos. La primer pregunta que hice fue: ¿por qué Singh ofrece un sólo ejemplo?, a esta siguieron otras: ¿son los únicos triángulos cojos que hay?, si no ¿cómo se pueden obtener los triángulos cojos? Estas dos últimas preguntas fueron tema de mi investigación, y hasta el momento, sin saber si hay alguna investigación o resultados al respecto, tengo una forma para obtener triángulos cojos, la cual será desarrollada, en caso de ser aceptada, dentro de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.

Para terminar, quiero poner unos ejemplos de triángulos cojos que he obtenido con la forma que deduje:

4059, 4060 y 5741; $4059^2 + 4060^2 = 5741^2$
137903, 137904 y 195025; $137903^2 + 137904^2 = 195025^2$
159140519, 159140520 y 225058681; $159140519^2 + 159140520^2 = 225058681^2$

Que como es fácil demostrar son triángulos rectángulos cuya diferencia de catetos es la unidad: triángulos cojos.

Bibliografía

Álgebra recreativa. Y. Perelman. Ediciones Quinto Sol.
El enigma de Fermat. Simon Singh. Editorial Planeta.
Investigación y ciencia. Diciembre de 1978.
Investigación y ciencia. Enero de 1998.
Muy interesante. Octubre de 1993