Nivel Superior

DESMANTELAMIENTOS Y GRÁFICAS DE CLANES

Martín Eduardo Frías Armenta
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Un clan de una gráfica G es una subgráfica completa maximal de G, la gráfica de clanes de G (k(G)), es la gráfica que tiene como vértices los clanes de G y una arista si los clanes respectivos se intersectan. Una gráfica es k-divergente si al iterar el operador de clanes, el orden de las sucesivas gráficas de clanes diverge; es k-periódica en caso contrario. Un caso particular de las gráficas k-periodicas, las k-nulas, son las gráficas para las cuales existe un n tal que a la n-esima iteracion del operador de clanes obtenemos una gráfica con un sólo vértice y ninguna arista. Un vértice x se dice que está dominado por un vértice z, si la vecindad cerrada de x está contenida en la vecindad cerrada de z. En esta conferencia se presenta un versión con algunas animaciones, del siguiente teorema: El k-comportamiento de una gráfica no se altera si borramos vértices dominados.

Introducción

Una gráfica $G=(V,E)$ es un par formado por un conjunto V o $V(G)$ llamado conjunto de vértices y por un conjunto de pares no ordenados E (o $E(G)$) de elementos de V llamados aristas.

Una gráfica H se dice subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Una subgráfica inducida H, en símbolos $H \subseteq_* G$, es una subgráfica de G tal que $uv \in E(H)$ siempre que se tenga $u,v \in V(H)$ y $uv \in E(G)$.

Gráficas de Clanes

Si F es una colección de conjuntos no vacíos, la gráfica de intersección de F es la gráfica cuyos vértices son los miembros de la colección y dos de ellos son adyacentes siempre que su intersección sea no vacía y sólo entonces.

Las subgráficas completas maximales de una gráfica G son los clanes de G.

La gráfica de clanes $k(G)$ de G es la gráfica de intersección de la colección de clanes de G.

Se define la gráfica $k^n(G)$ por inducción, de modo que:

$$k^n(G)=k(k^{n-1}(G)).$$

Se dice que una gráfica F es k-periódica con período p si es isomorfa a $k^p(F)$ pero no a $k^q(F)$, para $0<q<p$.

Una gráfica G es k-estacionaria si existe un entero n para el cual $k^n(G)$ es k- periódica, al mínimo de esos n será llamado índice de clanes ($ci(G)$), si no existe tal n diremos que el índice de clanes es infinito. Una gráfica G para la cual existe un entero n con la propiedad de que $k^n(G)=K_1$ (la gráfica que consta de un solo punto) es k-nula claramente éstas son una clase especial de k-estacionarias. Diremos que G k-diverge si el orden de $k^n(G)$ tiende a infinito cuando *n* tiende a infinito. El ejemplo más simple de gráfica k-divergente es el octaedro. El octaedro es un ejemplo en el cual *ci(G)* es igual a infinito.

Desmantelamientos

Si G es una gráfica, *z´* y *z* elementos de *V(G)* y *z'z* $\in$ *E(G)*, diremos que *z'* es dominado por *z* si cualquier vecino de z' es también vecino de *z* y escribiremos z $\geq$ z'.

Una gráfica irreducible es una gráfica que no tiene puntos dominados.

Definición

Sea *G* una gráfica y *H* una subgráfica inducida de *G*. Diremos que *H* se obtiene por medio de un desmantelamiento corto interno de *G*, en símbolos $G \xrightarrow{\#_0} H$, si cada elemento de *V(G)-V(H)* está dominado por algún elemento de V(H).

Definición

Si *G* y *H* son gráficas, diremos que *H* se obtiene por medio de un desmantelamiento corto de *G*, en símbolos $G \xrightarrow{\#} H$, si existe una subgráfica inducida *H'* de *G* isomorfa a *H* tal que $G \xrightarrow{\#_0} H'$.

En particular, si $G \xrightarrow{\#_0} H$ entonces $G \xrightarrow{\#}$ H. Claramente G $\xrightarrow{\#_0}$ G.

Observemos que *G* es un cono si y solo si $G \xrightarrow{\#} K_1$.

El siguiente es el principal resultado de la plática:

Teorema

Si $G \xrightarrow{\#} H$ entonces *H* y *G* tienen el mismo comportamiento bajo k, es decir:

a) G es k-nula si y solo si H es k-nula.

b) G es estacionaria si y solo si H es estacionaria.

c) G es k-divergente si y solo si H es k-divergente.

Demostración de a)

Si *G* es k-nula, entonces existe un entero *n* tal que

$$K_1=k^n(G) \xrightarrow{\#} \mathrm{k}^{\mathrm{n}}(\mathrm{H}).$$

Así, *H* es *k*-nula.

Si *H* es *k*-nula, entonces existe *n* tal que

$$k^n(G) \xrightarrow{\#} k^n(H)=K_1.$$

Así, $k^{n+2}(G)=K_1$, por lo tanto G es k-nula.

Bibliografía

F. Escalante. Über Iterierte Clique-Graphen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 39 (1973) 58-68.

M.E. Frías-Armenta. Gráficas Iteradas de Clanes. Tesis Doctoral Universidad Nacional Autónoma de México (2000).

V. Neumann-Lara. On Clique-divergent Graphs, Problemes Combinatoires et Théorie des Graphes (Colloques internationaux C.N.R.S, 260). Paris (1978), 313-315.

V. Neumann-Lara. Clique Divergence in Graphs, Algebraic Methods in Graph Theory (Coll. Math.Soc.Janos Bolyai, 25). Szeged (1981), 563-569.

V. Neumann-Lara. Clique Divergence in Graphs. Some Variations. Publ. Prelim. Inst. Mat. U.N.A.M. 224. México (1991), 1-14.

V. Neumann-Lara. A Theory of Expansive Graphs. In Preparation.

Neumann Lara Victor. Introducción a la Teoría de Gráficas. (Notas 10 de Noviembre de 1997).

E. Prisner. Convergence of Iterated Clique Graphs. Discrete Mathematics 103 (1992) 199-207.