ALGUNOS SISTEMAS HAMILTONIANOS INTERESANTES: UN PRETEXTO PARA HABLAR DE GEOMETRIA

Guillermo Dávila Rascón
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Se presentan varios ejemplos sencillos de Sistemas Hamiltonianos (v.g. el Problema de Kepler y el Oscilador Armónico) y a partir de ellos se ve la necesidad de construir un marco teórico que unifique las ideas involucradas en estos casos particulares. Esto nos lleva a la idea de Variedad Simpléctica, que es el concepto adecuado para la formulación geométrica de la mecánica clásica. Se estudia la geometría de este tipo de variedades, llamada Geometría Simpléctica y se obtiene una gama muy rica de conceptos y de resultados que vienen a ser muy importantes, sobre todo por su aplicación a la formulación de muchas ramas de la física, tanto clásica como cuántica. Sin embargo, la Geometría Simpléctica es, por sí misma, una de las ramas más activas de la investigación matemática actual y no sólo por sus aplicaciones; se presentarán algunos ejemplos donde se enfatiza esto.

Introducción

Sabemos por la Segunda Ley de Newton, que la fuerza que experimenta una partícula o un cuerpo de masa m al cambiar su velocidad, en un marco de referencia inercial, viene dada por

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{1.1}$$

lo cual equivale a decir que la *fuerza* $\vec{F}$ que experimente la partícula en cuestión es proporcional a su *aceleración* $\vec{a}$. Si denotamos por $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t)) \in \mathbf{R}^3$ la *posición* de la partícula en el tiempo t, entonces su *velocidad* y su *aceleración* vienen dadas, respectivamente, por

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{q}(t) \equiv \dot{\vec{q}}(t) \qquad\qquad \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{q}(t) \equiv \ddot{\vec{q}}(t)\,,$$

y de esta manera, la ecuación (1.1) la escribimos como

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{q}}(t) = m\dot{\vec{v}}(t)\,.$$

Introduciendo el *momento lineal* de la partícula, $\vec{p} = m\vec{v}$, la ecuación (1.1) se escribe como

$$\vec{F} = m\dot{\vec{p}}\,.$$

Si suponemos ahora que la masa de la partícula es $m = 1,$ entonces

$$\vec{p} = \vec{v} = \dot{\vec{q}}\,,$$
$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}\,.$$

Si, además, $U = U(\vec{q}, t)$ es una función tal que

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \frac{\partial U}{\partial q_3}\right) = -\nabla U\,,$$

en cuyo caso decimos que la función U es un *potencial* y que las fuerzas que actúan en el sistema son *conservativas*, entonces obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{q}_1 = p_1 \qquad \dot{q}_2 = p_2 \qquad \dot{q}_3 = p_3\,,$$
$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial U}{\partial q_1} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial U}{\partial q_2} \qquad \dot{p}_3 = -\frac{\partial U}{\partial q_3}\,,$$

que también podemos expresar como

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}} = \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} = -\nabla U \end{cases} \tag{1.2}$$

Consideremos ahora la función

$$H = H(\vec{q},\vec{p}) = \tfrac{1}{2}\,|\,\vec{p}\,|^2 + U(\vec{q})\,,$$

la cual es llamada el *Hamiltoniano* y representa la *energía total* del sistema. Si derivamos ésta con respecto a q_i y a p_i, y comparamos con (1.2), se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \qquad (i = 1,2,3). \tag{1.3}$$

Estas son las llamadas *ecuaciones de Hamilton* para una partícula de masa unitaria que se mueve en un campo de fuerzas conservativo. Un sistema de ecuaciones expresado de esta forma se llama un *Sistema Hamiltoniano*.

Notemos que el Hamiltoniano H es simplemente la suma de las energías *cinética* y *potencial* de la partícula. Un aspecto interesante de estos sistemas es la *conservación* de la energía, lo cual se puede ver derivando H con especto a t y sustituyendo de acuerdo con (1.3):

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{3}(-\dot{p}_i\dot{q}_i + \dot{q}_i\,\dot{p}_i) = 0\,.$$

Esto muestra que no hay cambios en la energía total, es decir, ésta se conserva; además, H es constante a lo largo de las curvas solución del sistema (1.3). En este caso, la función posición $\vec{q}(t)$ es un vector en $\mathbf{R}^3$ para cada t y al conjunto formado por todos estos vectores se le llama el *espacio de configuración* del sistema; al conjunto formado por los vectores posición-momento $(\vec{q},\vec{p}) \in \mathbf{R}^6$ se le llama el *espacio fase*.

Es obvio que esto lo podemos generalizar al caso en que una partícula de masa unitaria se mueve con una trayectoria $\vec{q}(t)$ en $\mathbf{R}^n$ bajo un potencial $U(\vec{q})$ con Hamiltoniano $H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n) = \tfrac{1}{2}\,|\,\vec{p}\,|^2 + U(\vec{q})$, donde:

$$\vec{q} : (a,b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$$
$$\vec{q} = \vec{q}(t) = (q_1(t),\ldots\ldots,q_n(t))\,.$$

Procediendo de manera análoga a la anterior, obtenemos un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \quad \vdots \\ \dot{q}_n = p_n \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} \\ \quad \vdots \\ \dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n} \end{cases} \tag{1.4}$$

de las cuales requerimos obtener su solución, esto es, integrar el sistema.

1. El Poblema de Kepler

Un cuerpo de masa M situado en el origen del plano coordenado ejerce una fuerza de atracción sobre otro cuerpo de masa m situado en el mismo plano con una magnitud que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos (Ley de la Gravitación Universal de Newton). Si $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t)) \in \mathbf{R}^2$ es la posición del cuerpo de masa m, entonces podemos clacular esa magnitud como $|\vec{F}| = -G\dfrac{mM}{|\vec{q}|^2}$. Usando la ecuación (1.1), se sigue que $\ddot{\vec{q}} = -G\dfrac{M\vec{q}}{|\vec{q}|^3}$ y obtenemos, después de normalizar la masa M y la constante de gravitación G a 1, la ecuación

$$\ddot{\vec{q}} = -\left(\frac{1}{|\vec{q}|^2}\right)\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}. \tag{2.1}$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial son bien conocidas y representan secciones cónicas. En este caso, el espacio de configuración es $\mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ y el espacio fase es $(\mathbf{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}) \times \mathbf{R}^2$.

Si $U(\vec{q}) = -\dfrac{1}{|\vec{q}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{q_1^{\,2} + q_2^{\,2}}}$, entonces $\nabla U = \left(\dfrac{q_1}{(q_1+q_2)^{3/2}}, \dfrac{q_2}{(q_1+q_2)^{3/2}}\right)$ por lo que el Hamiltoniano es $H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{1}{2}(p_1^{\,2} + p_2^{\,2}) - \dfrac{1}{\sqrt{q_1^{\,2} + q_2^{\,2}}}$; de esta manera la formulación Hamiltoniana del problema de Kepler dado por la ecuación (2.1) es

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -\dfrac{q_1}{(q_1{}^2 + q_2{}^2)^{3/2}} \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -\dfrac{q_2}{(q_1{}^2 + q_2{}^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{2.2}$$

lo cual podemos expresar como

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}} = p \\ \dot{\vec{p}} = -\nabla U(\vec{q}) \end{cases}$$

2. El Oscilador Armónico

Presentamos el caso de oscilador armónico simple en una dimensión (un grado de libertad). Este sistema consiste de una masa m sujeta al extremo de un resorte, el cual, a su vez, está sujeto a un soporte fijo. En la posición de equilibrio, el resorte está estirado por la acción del peso mg debida a la fuerza de gravedad y, en sentido opuesto, actúa la fuerza de recuperación del resorte que viene dada por la Ley de Hooke como ks, donde s es la elongación del resorte. Si suponemos que no existen otro tipo de fuerzas que actúan sobre el sistema y si la masa m es desplazada una distancia x de su posición de equilibrio, entonces aplicando la segunda ley de Newton se obtiene

$$m\ddot{x} = -k(s+x) + mg = -kx + (mg - ks) = -kx,$$

(usamos la variable x para denotar la posición del objeto, en lugar de q, pues estamos en el caso de una dimensión). De esto resulta la ecuación

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son bien conocidas y son de la forma

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt \qquad \text{(donde } w = \frac{k}{m}\text{).}$$

Si consideramos ahora un potencial de la forma $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ entonces

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p/m \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -kx \end{cases} \tag{3.1}$$

es la formulación Hamiltoniana de este problema, donde el Hamiltoniano viene dado por

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

El espacio de configuración es en este caso $\mathbf{R}$ y el espacio fase es $\mathbf{R}^2$.

3. Variedades Simplécticas

Los ejemplos anteriores de sistemas Hamiltonianos, aunque muy sencillos, nos servirán para ilustrar algunos puntos importantes en lo relativo a la geometría simpléctica. Notemos que las ecuaciones que describen el movimiento de estos sistemas mecánicos [(2.2) y (3.1)], es un número par ya que las variables que especifican el estado del sistema, ls posiciones q_i y los momentos p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ (en el caso general) son en total $2n$; aquí n es la dimensión del espacio de configuración y la dimensión del espacio fase es $2n$. Las variables q_i y p_i varían con el tiempo t, pero hemos visto que existen funciones de esas variables, v.g. el Hamiltoniano, que permanecen constantes y sólo dependen de las condiciones iniciales. Estas funciones son llamadas *integrales de movimiento* y representan cantidades que se conservan.

Es esta la razón de la importancia del formalismo Hamiltoniano, pues si se tiene un número adecuado de integrales de movimiento, independientes, será posible obtener las soluciones del sistema Hamiltoniano en cuestión por medio de *cuadraturas*, es decir, calculando las integrales de funciones dadas. En el caso del oscilador armónico en una dimensión se tiene una integral de movimiento, el Hamiltoniano H, y, como es bien conocido, la integración de este sistema se reduce a una cuadratura, es decir, a evaluar una integral. Para el caso del problema de Kepler en dos dimensiones, un corolario al Teorema de Liouville nos dice que si además del Hamiltoniano H existe otra integral de movimiento, funcionalmente independiente de H y definida en todo el espacio fase, entonces el sistema es *completamente integrable*, esto es, puede en principio, reducirse a cuadraturas.

Toda la teoría de sistemas Hamiltonianos encaja dentro de lo que se llama Geometría Simpléctica y a continuación, motivados por los ejemplos anteriores, daremos un marco teórico a estos sistemas. Así, consideremos una función $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$ que depende de las coordenadas de posición $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ y de los momentos $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de una partícula en movimiento, y también del tiempo del tiempo. Derivando F con respecto a t se obtiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

Sustituyendo $\dot{q}_i$ y $\dot{p}_i$ por sus expresiones en (1.4) se obtiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right),$$

que podemos expresar como

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\}, \tag{4.1}$$

donde la expresión

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

se llama el *corchete de Poisson* para las funciones H y F.

Si la función F es una integral de movimiento para el sistema, esto es $\frac{dF}{dt} = 0$, entonces de la ecuación (4.1) se obtiene la condición

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\{H,F\}=0\,,$$

por lo que si F no depende explícitamente del tiempo, se sigue

$$\{H,F\}=0\,.$$

En general, si dos funciones F y G están definidas en un dominio adecuado, entonces su corchete de Poisson es de nuevo una función con el mismo dominio de las anteriores y

$$\{F,G\}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right).$$

Este cumple las siguientes propiedades para cualesquiera tres funciones $F,G,H,$ y cualesquiera números reales a,b:

1) $\{F,G\}=-\{G,F\}$ (Antisimetría)
2) $\{aF+bG,H\}=a\{F,H\}+b\{G,H\}$ (Linealidad) (4.2)
3) $\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}=0$ (Identidad de Jacobi)
4) $\{F,GH\}=\{F,G\}H+G\{F,H\}$ (Regla de Leibniz)

Por otra parte, la definición general de *variedad simpléctica* es la de una *variedad diferenciable* junto con una 2-*forma diferencial* ω la cual es *cerrada* y *no degenerada*. Esto obliga a que la dimensión de la variedad siempre sea un número par, al igual que la dimensión del espacio fase en los ejemplos ya analizados.

Por ejemplo, $\mathbf{R}^2$ es una variedad diferenciable y si denotamos sus coordenadas por (q,p) y definimos $\omega=dq\wedge dp$, entonces $(\mathbf{R}^2,\omega)$ viene a ser una variedad simpléctica, donde dq y dp son las 1-*formas básicas, duales* a los vectores básicos de $\mathbf{R}^2$: $e_1=(1{,}0)\equiv\frac{\partial}{\partial q}$, $e_2=(0{,}1)\equiv\frac{\partial}{\partial p}$. Toda 2-forma definida en una variedad se evalúa en *vectores tangente* a la variedad y nos da un número real; el espacio tangente a $\mathbf{R}^2$ es el mismo $\mathbf{R}^2$ por lo que si $\vec{u}=(q_1,p_1)$, $\vec{v}=(q_2,p_2)\in\mathbf{R}^2$, entonces

$$\omega(\vec{u},\vec{v})=dq\wedge dp(\vec{u},\vec{v})\overset{def}{=}dq(\vec{u})dp(\vec{v})-dq(\vec{v})dp(\vec{u})=q_1p_2-q_2p_1\,.$$

El que la 2-forma sea cerrada significa que su diferencial es cero: $d\omega=0$, mientras que la no degeneración significa que si $\omega(\vec{u},\vec{v})=0\quad\forall\vec{v}\in\mathbf{R}^2$, entonces $\vec{u}=\vec{0}$. La 2-forma $\omega=dq\wedge dp$ se llama la *forma canónica* de $\mathbf{R}^2$.

En general, si pensamos en $\mathbf{R}^{2n}$ con coordenadas $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$, entonces la 2-forma $\omega=\sum_i dq_i\wedge dp_i$ hace de $(\mathbf{R}^{2n},\omega)$ una variedad simpléctica. Esta es la estructura simpléctica canónica de $\mathbf{R}^{2n}$.

Recordemos que un campo vectorial X en $\mathbf{R}^2$ asigna un vector tangente a cada punto de $\mathbf{R}^2$: $(q,p)\mapsto X(p,q)\in\mathbf{R}^2$. Sea $H:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ una función suave, esto es, infinitamente diferenciable. Definimos el *campo vectorial Hamiltoniano* X_H con *función de energía* H como aquel campo vectorial determinado por la condición

$$\omega(X_H,Y)=dH(Y)\,, \tag{4.3}$$

donde ω es una 2-*forma simpléctica* en $\mathbf{R}^2$.

Veamos lo que esto significa. Como H es una función (0-forma), su diferencial dH es la 1-forma $dH=\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp$ y la podemos evaluar en vectores. Sea $\vec{u}=(q_1,p_1)$ y supongamos que $Y(q_1,p_1)=\vec{\xi}=(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned}dH\cdot Y_{\vec{u}}&=dH\cdot Y(q_1,p_1)=dH(\vec{\xi})=(\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp)(\vec{\xi})\\&=\frac{\partial H}{\partial q}dq(\vec{\xi})+\frac{\partial H}{\partial p}dp(\vec{\xi})=\alpha\frac{\partial H}{\partial q}+\beta\frac{\partial H}{\partial p}\,.\end{aligned}$$

Por otra parte, si ω es la forma canónica en $\mathbf{R}^2$ y suponemos que $X_H(q_1,p_1)=(x,y)\in\mathbf{R}^2$ donde debemos determinar x e y, entonces

$$\omega(X_H,Y)_{\vec{u}}=\omega(X_H(\vec{u}),Y(\vec{u}))=dq\wedge dp((x,y),(\alpha,\beta))=x\beta-y\alpha\,,$$

y tomando en cuenta (4.3) vemos que

$$x\beta-y\alpha=\alpha\frac{\partial H}{\partial q}+\beta\frac{\partial H}{\partial p}\,,$$

de lo cual obtenemos

$$x=\frac{\partial H}{\partial p}\,,$$

$$y=-\frac{\partial H}{\partial q}\,,$$

que es, en escencia, el sistema Hamiltoniano para el caso del oscilador armónico.

En el caso del problema de Kepler el espacio fase es $M=(\mathbf{R}^2\setminus\{\vec{0}\})\times\mathbf{R}^2$ con coordenadas $((q_1,q_2),(p_1,p_2))$ y la forma simpléctica en M dada por

$$\omega=dq_1\wedge dp_1+dq_2\wedge dp_2\,,$$

hace de (M,ω) una variedad simpléctica. El Hamiltoniano H es una función suave definida en M y toma valores en $\mathbf{R}$. El campo vectorial Hamiltoniano asociado a H está determinado por la condición $\omega(X_H,Y)=dH(Y)$ por lo que la 1-forma

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial H}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial H}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial H}{\partial p_2}dp_2\,,$$

está definida en M y si suponemos

$$Y((u_1,u_2),(v_1,v_2))=((\alpha,\beta),(\gamma,\delta))\,,$$

$$X_H((u_1,u_2),(v_1,v_2))=((x,y),(z,w))\,,$$

entonces se obtienen las condiciones

$$x = \frac{\partial H}{\partial p_1},$$
$$y = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$
$$z = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$w = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

que son las mismas que para el sistema (2.2).

En general, el espacio fase de un sistema mecánico siempre tiene estructuras simpléctica ya que si la variedad diferenciable M, de dimensión n, es el espacio de configuración, entonces el espacio fase resulta ser el *haz cotangente* T^*M de la variedad M. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son *coordenadas locales* en una vecindad de un punto $x \in M$, el espacio tangente a M en el punto x se denota por T_xM y éste es un espacio vectorial con una base formada por los vectores tangente $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. El *haz tangente* de M es la unión ajena de todos estos espacios tangente: $TM = \dot{\bigcup}_{x \in M} T_xM$ el cual es una variedad diferenciable de dimensión $2n$; el *espacio dual* de cada espacio tangente, T_x^*M se llama el *espacio cotangente* a M en el punto x y sus elementos son 1-formas en el espacio tangente T_xM. Una base para T_x^*M es $dx_1, dx_2, \ldots\ldots, dx_n$, que son las 1-*formas duales* a los vectores $\frac{\partial}{\partial x_i}$. El *haz cotangente* de M se define como la unión ajena de todos los espacios cotangente a M: $T^*M = \dot{\bigcup}_{x \in M} T_x^*M$ y éste es una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Un elemento de T^*M es una 1-forma definida en el espacio tangente a M en algún punto de M por lo que para designar un punto en el haz cotangente requerimos de las coordenadas del punto de la variedad y de las componentes que definen la 1-forma. Esto es si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una elección de coordenadas locales para puntos de M, entonces la 1-forma está dada por n componentes $p_1, p_2, \ldots, p_n$, que son funciones que dependen del punto de la variedad, de tal manera que los $2n$ números $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ forman un sistema de coordenadas locales para T^*M. La estructura simpléctica de T^*M viene dada, de manera natural, por la 2-forma

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2 + \cdots\cdots + dq_n \wedge dp_n. \tag{4.4}$$

En una variedad simpléctica (M, ω) también se tiene la noción de corchete de Poisson que ya discutimos antes, el cual se define para cualesquiera dos funciones suaves F y G definidas en M y que toman valores en $\mathbf{R}$, como

$$\{F, G\}(p) = \omega_p(X_G(p), X_F(p)), \tag{4.5}$$

y es de nuevo una función definida en M con valores en $\mathbf{R}$, y donde X_F y X_G son los campos Hamiltonianos asociados a F y G, respectivamente, y están determinados por las condiciones

$$\omega(X_F, Y) = dF(Y), \qquad \omega(X_G, Y) = dG(Y).$$

Las propiedades del corchete de Poisson (4.2) se cumplen en general y el conjunto de las funciones suaves en M con valores en $\mathbf{R}$, que se denota por $C^\infty(M)$, viene a ser lo que se llama un álgebra de Lie donde la operación la define el corchete $\{,\}$. Así, podríamos continuar hablando de muchos conceptos interesantes y de la geometría de las variedades simplécticas pero eso nos tomaría mucho espacio. Baste decir que toda variedad simpléctica es localmente igual que $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$ con la estructura simpléctica natural (Teorema de Darboux).

En el caso de la mecánica, si la variedad M es el espacio de configuración para un problema físico, entonces el espacio fase es T^*M, que junto con la 2-forma (4.4) es la variedad simpléctica donde *viven* las ecuaciones de Hamilton para ese problema y el corchete dePoisson está definido para funciones suaves $F : T^*M \to \mathbf{R}$, de tal manera que si $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ son coordenadas locales en T^*M, entonces, aplicando (4.5), el corchete de Poisson para dos funciones $f, g \in C^\infty(T^*M)$ resulta ser

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

y las ecuaciones de Hamilton se escriben como

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\},$$
$$\dot{p}_i = \{H, p_i\},$$

o, en forma global, esto es, libre de las coordenadas q_i y p_i, como

$$X_H f = \{H, f\}$$

para $f \in C^\infty(T^*M)$, donde X_H es el campo vectorial dado por

$$X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

De esta manera, la geometría simpléctica viene a ser un marco general para los sistemas Hamiltonianos. Este campo es, actualmente, una fuente de muchos problemas interesantes, no sólo por sus aplicaciones a problemas de la física, sino porque se ha constituído en una rama muy importante de las matemáticas contemporáneas y tiene relación con muchas otras áreas dentro de esta ciencia.

Bibliografía

[1] Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, New York, 1989.

[2] Eikelder, H. M. M. ten, Symmetries for Dynamical and Hamiltonian Systems, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1985.

[3] Fomenko, A. T., Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1988.

[4] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Mechanics, Pergamon Press, Oxford, 1976.

[5] Perelomov, A. M., Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras, Birkhausser, Berlin, 1990.

[6] Vaismann, I., Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes, Birkhausser, Boston, 1987.