Nivel Superior

PROBLEMAS DE PERTURBACIÓN SINGULAR Y ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS

Francisco Armando Carrillo Navarro
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

Resumen

Los problemas de perturbación singular (PPS), tienen varios orígenes en la matemática aplicada, uno de ellos es la dinámica de fluidos de donde resultan problemas lineales con valores a la frontera. Por otro lado los PPS provienen de una clase especial de problemas que contienen un parámetro especial ε[1]*, cuando este parámetro es pequeño, la ecuación diferencial correspondiente es "stiff"; cuando* $\varepsilon \to 0$ *la ecuación diferencial se convierte en una ecuación diferencial algebraica. Se obtiene mucho conocimiento de la naturaleza interior del problema estudiando el caso límite* $\varepsilon = 0$*, llamado "el sistema reducido", el cual es mucho más fácil de analizar, un ejemplo particular de esto último es lo que trataremos aquí. Los resultados de convergencia conocidos hasta ahora son para PPS y ecuaciones diferenciales algebraicas semi-explícitas (ecuaciones diferenciales algebraicas de índice uno). Sin embargo, muchos problemas de interés práctico son de índices altos y aquí los métodos numéricos son cada vez menos y menos eficientes.*

Introducción

Un ejemplo muy ilustrativo acerca de la conveniencia del estudio del sistema reducido de un PPS nos lo da la conocida ecuación de Van der Pol, modelo clásico de un oscilador armónico, cuyo modelo general está dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + \alpha\, y' + y = 0, \tag{1}$$

cuyos primeros ejemplos prácticos fueron estudiados por Rayleigh (1883) y posteriormente por Van der Pol (1920-1926).

Las soluciones de (1) son amortiguadas si $\alpha > 0$ e inestables si $\alpha < 0$. La idea es cambiar α de tal manera que tengamos $\alpha < 0$ para y pequeñas y $\alpha > 0$ para y grandes. La expresión que describe esta situación física, que es un tanto idealizada, es la expresión

$$\alpha = \varepsilon\left(y^2 - 1\right), \quad \varepsilon > 0,$$

y esto nos lleva a la ecuación de Van der Pol

$$y'' + \varepsilon\left(y^2 - 1\right)y' + y = 0, \tag{2}$$

que se puede reescribir también como el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \varepsilon\left(1 - y^2\right)y_2 - y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

En la ecuación (3) las oscilaciones pequeñas son amplificadas y las oscilaciones grandes son amortiguadas. Por lo tanto es natural esperar una solución periódica estable a la cual convergen todas las demás soluciones, a esta solución periódica para (2), se le llama *ciclo límite* para (3). La prueba de que el ciclo límite de la ecuación (3) es único la dio Liénard (1928), los estudios de existencia y unicidad de ciclos límite previos a los de Liénard fueron hechos por Poincaré (1882) y por Bendixon (1901), resumidos en el famoso teorema de Poincaré-Bendixon, pero estos estudios son satisfactorios desde una perspectiva teórica que suele ser difícil de

[1] Coeficiente de viscosidad en el caso de dinámica de fluidos.

aplicar, mientras que el criterio de Liénard es más práctico y garantiza la existencia de trayectorias cerradas para toda ecuación de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \qquad (4)$$

llamada la *ecuación de Liénard*. El criterio es el siguiente:

Teorema de Liénard: *Sean dos funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *que satisfacen las siguientes condiciones:* (i) *ambas son continuas, al igual que sus derivadas, en todo* x*;* (ii) $g(x)$ *es impar y tal que* $g(x) > 0$ *para* $x > 0$*, y* $f(x)$ *es par; y* (iii) *la función impar* $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ *tiene exactamente un cero positivo en* $x = a$*, es negativa para* $0 < x < a$*, es positiva y no decreciente para* $x > a$*, y* $F(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$*. Entonces la ecuación (4) tiene una única trayectoria cerrada que rodea al origen en el plano de fases, y a ella tienden en forma de espirales todas las demás trayectorias cuando* $t \to \infty$.

La principal aplicación del teorema de Liénard ocurre en la ecuación (2), donde

$$f(y) = \varepsilon\left(y^2 - 1\right) \quad \text{y} \quad F(y) = \varepsilon\left(\frac{y^3}{3} - y\right),$$

considerando que

$$y'' + \varepsilon\left(1 - y^2\right)y' = \frac{d}{dx}\left[y' + \varepsilon\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\right]$$

e insertando las *coordenadas de Liénard*

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' + \varepsilon\left(y - \frac{y^3}{3}\right),$$

en la ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - \varepsilon\left(y_2 - \frac{y^3}{3}\right) \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned} \qquad (5)$$

Solución asintótica de la ecuación de Van der Pol

El clásico artículo de Dorodnicyn (1947) estudió la ecuación de Van der Pol con α grande, es decir, con ε pequeña. Las investigaciones son más sencillas y rápidas si se usan las coordenadas de Liénard. La ecuación (2) la escribiremos aquí como

$$\varepsilon z'' + (z^2 - 1)z' + z = 0, \qquad (6)$$

si

$$y := \varepsilon z' + \left(\frac{z^3}{3} - z\right)$$

insertamos la identidad

$$\varepsilon z'' + (z^2 - 1)z' = \frac{d}{dx}\left(\varepsilon z' + \left(\frac{z^3}{3} - z\right)\right)$$

así que (6) nos da

$$
\begin{aligned}
y' &= -z & &=: f(y,z) \\
\varepsilon\, z' &= y - \left(\frac{z^3}{3} - z\right) & &=: g(y,z)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

La Figura 1, muestra soluciones de la ecuación (7) con $\varepsilon = 0.03$ en el plano yz. Se pueden observar movimientos rápidos a través de la variedad M definida por $y = z^3/3 - z$. A fin de aproximar la solución para ε muy pequeños, haremos en la ecuación (7) $\varepsilon = 0$ y obtendremos el llamado sistema *reducido*

$$
\begin{aligned}
y' &= -z & &=: f(y,z) \\
0 &= y - \left(\frac{z^3}{3} - z\right) & &=: g(y,z)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Mientras que (7) no tiene una solución analítica, (8) puede resolverse fácilmente, obteniendo

$$
y' = -z = \left(z^2 - 1\right)z' \quad \acute{o} \quad \ln|z| - \frac{z^2}{2} = x + C \qquad (9)
$$

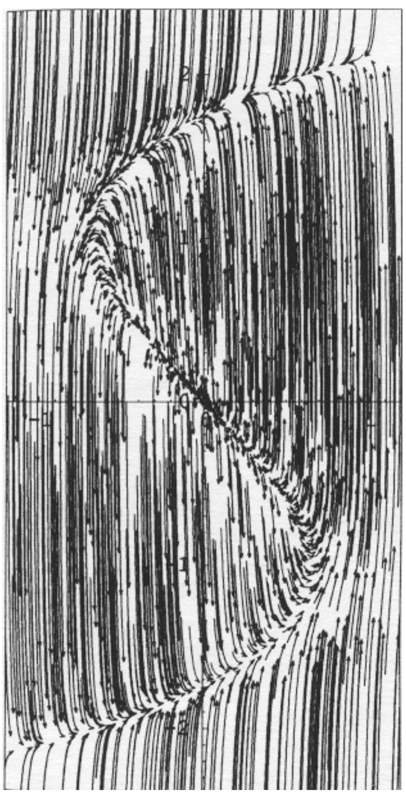

Figura 1

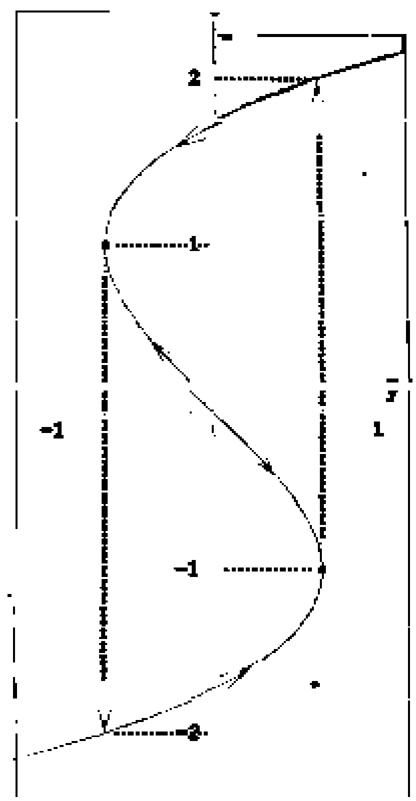

Figura 2

La ecuación (8) es llamada una *ecuación diferencial algebraica* (EDA), ya que combina una ecuación diferencial (primera línea) con una ecuación algebraica (segunda línea). Tales problemas tienen sentido solamente si los valores iniciales son *consistentes*, es decir, si permanecen en la variedad M. Los puntos de M con coordenadas $y = \pm 2/3,\ z = \mp 1$ son de interés especial (Figura 2): en esos puntos la derivada parcial $g_z = \partial g / \partial z$ se anula y la variedad definida no es "transversal" a lo largo de la dirección del movimiento rápido. Aquí las soluciones de (8) dejan de existir, mientras que las soluciones del problema (7) para $\varepsilon \to 0$ saltan con velocidad "infinita" a la variedad opuesta. Para $-1 < z < 1$ la variedad M es *inestable* para la solución de (2) (aquí $g_z > 0$), de otra forma M es *estable* ($g_z < 0$).

Demostraremos el poder de la ecuación reducida respondiendo a la pregunta: ¿cuál es el período T del ciclo límite solución de la ecuación de Van der Pol cuando $\mu \to \infty$ (es decir, $\varepsilon \to 0$)?. La figura 2 muestra que el valor asintótico de T son sólo los tiempos para los cuales $z(x)$ de (9) necesita avanzar de $z = -2$ a $z = -1$, es decir,

$$T = 3 - 2\ln 2 . \tag{10}$$

Este es el primer término de la fórmula asintótica de Dorodnicyn. Vemos también que $z(x)$ alcanza su valor máximo en $z = \pm 2$ (es decir, cruza el corte de Poincaré $z' = 0$). Entonces tenemos el resultado curioso que el ciclo límite de la ecuación de Van der Pol (6) tiene el mismo valor inicial asintótico $z = 2$ y $z' = 0$ cuando $\alpha \to 0$ y cuando $\alpha \to \infty$.

Bibliografía

[1] Hairer, E., Norsett, S.P., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems, Springer Verlag (1987).

[2] Hairer, E., Wanner, G., Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential-Algebraic Problems, Springer-Verlag (1991).

[3] Zwillinger, D., Handbook of differential equations, Academic Press, Inc. (1989).

[4] Simmons, G.F., Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas, Segunda edición, McGraw-Hill (1994).