Nivel superior

SACCHERI Y EL “V” POSTULADO: PRELUDIO DE UN NUEVO PENSAMIENTO MATEMÁTICO

José de Jesús Ayala
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Se pretende dar las ideas centrales del trabajo de Saccheri, en su intento por demostrar el “V” postulado de Euclides. Se explica su importancia dentro del desarrollo posterior de la matemática en dos sentidos: El romper la forma de pensar a lo largo de los siglos de la geometría euclideana como la auténtica y única geometría posible para describir el espacio físico; el paso de la verdad matemática como leyes que expresan las relaciones dadas en la naturaleza a la verdad matemática en el sentido estricto de la consistencia lógica. En el pensamiento matemático moderno, el sistema de postulados que sustentan una teoría matemática no son más que hipótesis cuya realidad no les concierne en tanto gocen de la propiedad de ser consistentes o libres de alguna posible contradicción interna.

Introducción

A lo largo de siglos de historia , las matemáticas han pasado por momentos difíciles en los que su propio creador, el pensamiento humano, ha tenido que sortear construyendo las vías que las han devuelto a una eventual estabilidad en lo que respecta a sus fundamentos y convirtiéndolas paralelamente en el instrumento más poderoso al servicio de la ciencia en su búsqueda por comprender el mundo que nos rodea.

Ciertamente , el status que la matemática moderna ha alcanzado, no ha sido el producto de un proceso continuo de logros y éxitos, sino más bien ha sido el resultado del esfuerzos de muchos hombres por poner orden ante los verdaderos momentos de desequilibrios que se vivieron en épocas pasadas y recientes y que tambalearon el edificio ya construido teniendo que penetrar hasta sus mismos cimientos intentando librar a las matemáticas de la posibilidad de nuevos desajustes internos.

Este sueño por lograr un “cuerpo perfecto” y libre de impurezas se remonta hasta los tiempos de gloria de los antiguos griegos. La búsqueda de la “verdad” en las matemáticas estuvo acompañada durante muchos siglos por la sombra del dogma y la fe, aún en las mentes más brillantes. Esto hizo que el desarrollo actual de las matemáticas tardara mucho más en llegar hasta que grandes matemáticos de pensamiento audaz y libre, del siglo XIX, impusieran un planteamiento nuevo sobre cómo debiéramos entender las matemáticas en adelante, acabando con el viejo ideal de la “verdad” de las matemáticas.

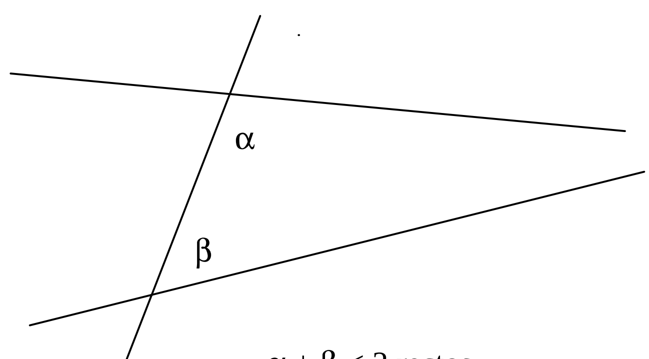
El grado de abstracción alcanzado ha sido una manifestación profunda de la mente creadora del hombre y el diseño de las estructuras matemáticas producidas dentro de este mundo intelectual, causa aún más asombro cuando se descubre su proyección en la intrincada complejidad de la naturaleza.

Para quienes de alguna manera, hacemos de las matemáticas una “mercancía” sobre la cual ceñimos nuestras actividades profesionales es, con justicia, deseable contar con alguna cultura histórica que dé cuenta, a grandes rasgos, de cómo esta disciplina se ha construido hasta llegar a su concepción moderna. En este sentido me propongo describir, sin ser exhaustivo, las ideas centrales del trabajo de Saccheri en relación al problema del “V” postulado de Euclides que contribuyó al paso decisivo de otorgarle ciudadanía matemática a las geometrías no euclidianas. Una consecuencia de esto es que condujo a un cambio hacia un pensamiento libre de ideas preconcebidas y de intuiciones que experimentamos de nuestro mundo sensorial. Así pues *la verdad matemática como reflejo del mundo real fue sustituida por una verdad en el sentido estricto de consistencia lógica,* enterrando con ello el paradigma mantenido por muchos siglos: *La geometría euclidiana como la única verdad posible para describir el espacio físico en que vivimos.*

El problema del “V” postulado

Según cuenta Proclo, un historiador griego del siglo V, desde que los elementos de Euclides aparecieron en el siglo III a.C. , inaugurando con ello el enfoque lógico deductivo de las matemáticas, hubo inmediatas reacciones acerca de un postulado en particular, llamado el V postulado:

> *“Si una recta que yace sobre otras dos, hace que los ángulos internos de un mismo lado juntos midan menos que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas si se prolongan indefinidamente, se encuentran de lado en que los ángulos juntos sean menor que dos rectos.”*



$\alpha + \beta < 2$ rectos

En realidad si uno compara el enunciado de este postulado (considerando axioma y postulado como sinónimos) con respecto a los restantes, es casi inmediato el darse cuenta que dicho enunciado no goza de la propiedad clásica atribuida a los postulados: el ser “autoevidente”. De hecho es verboso y generalmente los iniciados tienen que leerlo más de una vez antes de tener cabal comprensión de su significado. Esto contrasta pues, por ejemplo, con el IV postulado que dice: “Todos los ángulos rectos son iguales entre sí”. Otra cosa que llamó la atención, sobre todo, es que analizando la proposición I-17 , el V postulado revela ser su recíproco y aunado esto al hecho mismo de que Euclides pospone su uso hasta la proposición I-29. Indicios de esta naturaleza atrajeron la atención de mentes críticas de aquellos tiempos, iniciándose contra lo que se podía esperar, una larga y tortuosa actividad matemática desfilando matemáticos y “grandes” matemáticos en la búsqueda del descubrimiento del misterio que rodeaba al postulado de las paralelas que parecía, por decirlo así, “un pan comido” dada su apariencia simple y comprensible, pero que resultó uno de los problemas más difíciles de resolver por muchos siglos, quedando finalmente “victorioso” de la pretensión de muchos de enlistarlo como un teorema más del sistema axiomático euclidiano. En su momento el gran matemático D'Lambert se expresó de tal problema como "el escándalo de la geometría".

Específicamente fueron dos las direcciones hacia las cuales se orientaron los esfuerzos:

- Remplazar el postulado por otro equivalente.
- Sacarlo de los postulados y derivarlo como un teorema de los otros postulados del sistema euclidiano.

Históricamente las equivalencias fueron generándose en el proceso mismo de la actividad para demostrar el V postulado de los postulados restantes pues sus enunciados, en principio, eran tomados tácitamente como verdades independientes de lo que se quería probar.

Algunas de los enunciados equivalentes al postulado de las paralelas son

- Existen un par de líneas rectas coplanares por todas partes igualmente distantes una a la otra.
- Por un punto dado que no está en una línea recta dada, se puede dibujar únicamente una línea recta paralela a la línea dada.
- Existe un par de triángulos semejantes no congruentes.
- Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos es igual y si sus ángulos adyacentes a un tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos son ángulos rectos.
- Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, entonces el cuarto ángulo es también recto.
- Existe por lo menos un triángulo cuya suma de sus tres ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.
- A través de un punto que está dentro de un ángulo menor que 60 grados, siempre se puede dibujar una línea recta que intersecte ambos lados del ángulo.
- Un circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera.
- No hay límite superior para el área de un triángulo.

Cabe decir que dentro de estos sustitutos, uno de los más favorecidos en la enseñanza de la geometría a nivel medio y medio superior es el segundo de la lista que es atribuido al físico y matemático escocés Jhon Playfair (1748-1819).

Es importante señalar que la teoría desprendida del sistema axiomático euclidiano no se ve "afectada" por el remplazo de uno de sus postulados siempre que el sustituto, junto con los postulados restantes deriven, como consecuencia lógica, al sustituido. En forma esquemática si denotamos como $[P, P_v]$ al conjunto de postulados(o axiomas) euclidianos, siendo P_v el concerniente a las paralelas y P el conjunto de los otros nueve restantes, y [L] las reglas lógicas empleadas para pasar de una afirmación a otra entonces si la afirmación T es deducido, con los instrumentos anteriores, lo llamamos teorema y podemos escribir

$$[P, P_v] + [L] \longrightarrow [T]$$

Ahora bien si además T es tal que

$$[P, T] + [L] \longrightarrow [P_v]$$

decimos que T y P_v son enunciados equivalentes. Así que podemos decir que cualquier sustituto equivalente a P_v , junto con los restantes postulados, nos suministran la misma geometría euclidiana.

Una inmensa cantidad de trabajo y, consecuentemente, de intentos fallidos fue la constante característica a lo largo de siglos por derivar el postulado de las paralelas de Euclides de sus otras equivalencias. Tarde que temprano, cuando hombres entusiastas proclamaban la gloria de la presunta demostración, resultaba, de un análisis detenido, que tal demostración descansaba sobre una verdad equivalente al resultado a probar. Situación de este estilo pasó, por ejemplo, con Claudio Ptolomeo(150 a.c), Nasír- ed-din(1201- 1272), Jhon Wallis(1616-1703). Éste fue pues el círculo vicioso que imperó en todos esos intentos pues se asumía algo equivalente de lo que se quería probar. De hecho no faltaron razonamientos engañosos para fabricar la supuesta demostración.

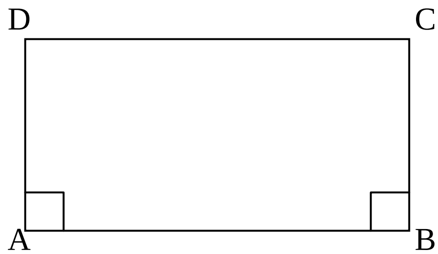
Algunos historiadores reconocen que enfrascarse en un análisis profundo de los fracasos obtenidos hasta el siglo XVII es prácticamente innecesario si lo que importa considerar son los momentos claves que empujaron al desarrollo posterior de la matemática. Sin embargo, la opinión es otra cuando aparece en escena la investigación notable realizada por Gerolamo Saccheri en 1733 con relación al ya famoso V postulado.

Saccheri dedicó su vida a la enseñanza universitaria jesuita dictando cátedra de retórica, teología y filosofía. Su talento para las matemáticas se puso al descubierto cuando leyó los "Elementos de Euclides" quedando sumamente motivado por la potencia de la deducción lógica y en particular del método de reducción al absurdo. Posteriormente Saccheri hizo una publicación llamada "lógica demostrativa" en la que el método favorito era el de reducción al absurdo. Con su experiencia en sus estudios de lógica y conociendo el trabajo de otros sobre las paralelas se propuso, como tantos, resolver el problema pero mediante un camino distinto al de sus predecesores.

Saccheri concentró su trabajo en analizar las consecuencias de negar el V postulado, con la esperanza de llegar a una contradicción que permitiera deducir, por reducción al absurdo, dicho postulado de los postulados restantes. El resultado de este trabajo culminó en una publicación titulada "Euclides libre de toda falla" editado en 1733, unos cuantos meses antes de su muerte. Describamos ahora las ideas centrales de este trabajo.

Saccheri acepta las primeras 28 proposiciones de los "elementos de Euclides" las cuales no requieren del V postulado para su demostración. Posteriormente pasa a estudiar el birrectángulo isósceles que es un cuadrilátero ABCD en el cual

$$AD=BC \text{ y } \angle A \text{ y } \angle B \text{ son rectos}$$



Tal configuración es construible bajo el grupo de postulados y proposiciones aceptados. Además Saccheri demuestra que

$$\angle C=\angle D$$

El paso que sigue es esencial en su razonamiento pues observa que no hay nada que pueda asegurar algo respecto a la magnitud de estos ángulos. Claro está, si asumimos el V postulado se deduce que ambos ángulos son ángulos rectos pero precisamente se trata de prescindir de dicho postulado. Así, Saccheri plantea tres posibilidades:

1) La hipótesis del ángulo recto (h.a.r.).
2) La hipótesis del ángulo obtuso (h.a.o.).
3) La hipótesis del ángulo agudo (h.a.a.).

La lógica del trabajo consiste en excluir las dos últimas posibilidades mostrando que sus respectivas hipótesis conducen a una contradicción, digamos de la forma P y ~P. Esquemáticamente la idea era mostrar las siguientes situaciones contradictorias

$$[P, h.a.o] + [L] \longrightarrow \sim P$$
$$[P, h.a.a] + [L] \longrightarrow \sim P$$

Obtenida tales situaciones quedaría probada, por reducción al absurdo, la hipótesis h.a.r. y finalmente demostrando, bajo esta última hipótesis, el V postulado de Euclides o más precisamente haciendo ver que

$$[P, h.a.r.] + [L] \longrightarrow [P_v] \text{ (el V postulado)}$$

el postulado de las paralelas quedaría así establecido del resto de los postulados.

Pero, ¿qué fue lo que realmente pasó?

Esta es la síntesis: Saccheri, al igual que Euclides, asumiendo que las líneas rectas tienen longitud infinita, logra obtener la contradicción buscada para el caso h.a.o., pero el esfuerzo para eliminar h.a.a. se torna bastante complicada. Él probó una cadena de resultados “extraños” pero sin llegar a una contradicción aparente. Analizando sus propios resultados e influido por una arraigada percepción euclidiana del espacio físico, termina con argumentos confusos forzando la contradicción, con la que él mismo no quedó satisfecho, resolviendo como sigue:

La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque es repugnante a la naturaleza de la línea recta.

Algunos de los resultados más importantes que Saccheri descubre respecto a h.a.r., h.a.o. y h.a.a. son los siguientes:

- Si una de las hipótesis es verdadera para un único cuadrilátero bi-rectangular isósceles, entonces es verdadera para todo cuadrilátero.
- En las hipótesis h.a.r., h.a.o., y h.a.a., la suma de los ángulos interiores de un triángulo es respectivamente, igual, mayor, o menor que dos ángulos rectos.
- Si existe un único triángulo para el cual la suma de los ángulos es igual, mayor, o menor que dos ángulos rectos, se sigue respectivamente la validez de las hipótesis h.a.r., h.a.o. y h.a.a.
- Dada una línea recta y un punto que no está sobre la línea, bajo h.a.r., h.a.o., y h.a.a., existe, respectivamente, una única línea recta, ninguna línea recta, o una infinidad de líneas rectas que pasan por el punto y no encuentran a la línea dada.
- El lugar geométrico del extremo de una perpendicular de longitud constante, la cual se mueve con su otro extremo sobre una línea recta fija, es una línea recta bajo h.a.r., una curva convexa a la línea fija bajo h.a.o., y una línea curva cóncava a la línea fija bajo h.a.a.

Fin al problema

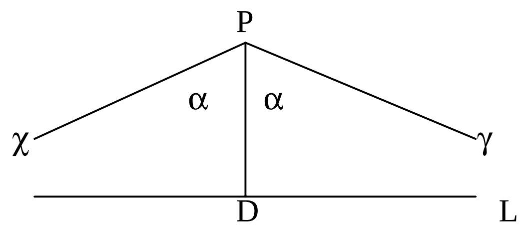
Aún cuando Saccheri entró en el "selecto" grupo de los que fracasaron con el problema del postulado de las paralelas de Euclides y aunque la lista continuó aumentando algún tiempo después con matemáticos como D'Alambert y Legendre, dejó abierto el camino para que alguien diera ese paso decisivo de aceptar y construir rigurosamente una nueva geometría. Quizás Saccheri pudo haber sido la figura que diera fin al famoso problema si, como dijimos antes, se hubiera liberado de la influencia de un mundo euclidiano.

Tres personas tienen el reconocimiento de haberle dado fin al problema. Carl F. Gauss (1777-1885) de Alemania, Janos Bolyai (1802-1860) de Hungría, y Nicolai Ivanovitch Lobachevski (1793-1856) de Rusia. Aunque aparentemente Gauss fue el primero en plantear la indemostrabilidad del postulado de las paralelas, los tres trabajando independientemente llegaron a esa misma conclusión. Todos ellos, digámoslo así, comprendieron que los resultados obtenidos por Saccheri bajo h.a.a.**,** de ningún modo eran contradictorios y más aún, que bajo esta hipótesis es posible ofrecer una nueva geometría tan consistente como la euclidiana. Así, tanto Gauss como Bolyai y Lobachevski desarrollaron la nueva y primera geometría en la historia diferente a la geometría clásica griega que el propio Gauss llamo "geometría no euclidiana". Todos ellos crearon esta nueva geometría esencialmente negando el V postulado de Euclides, en la forma del axioma de Playfair por el siguiente:

Por un punto exterior a una recta dada, pasa más de una paralela.

Al parecer, Gauss se abstuvo de publicar sus propios hallazgos, siendo Lobachevski el primero en hacerlo en 1829-30, dos o tres años antes de que el trabajo de Bolyai apareciera impreso. Aunque los trabajos son prácticamente los mismos, Bolyai nombra a su geometría "absoluta" mientras que Lobachevski llama a la suya "imaginaria". Ambas son el antecedente directo de lo que modernamente se conoce como geometría “hiperbólica” en donde la versión de las paralelas la podemos describir como sigue:

> *“Dado una recta L y un punto P exterior a ella, existen exactamente dos rectas χ, γ, la cual llamaremos paralelas, que forman un mismo ángulo agudo α con respecto al segmento PD perpendicular a L tales que las únicas líneas rectas que cortan a L son las que forman un ángulo agudo menor que α respecto a PD, mientras que las que forman un ángulo mayor, no cortaran a L”.*



Cambio de enfoque de las matemáticas

Aunque el problema de la indemostrabilidad del V postulado o de su independencia de los demás postulados y el de la consistencia de las teorías axiomáticas era poco debatido en el momento de la creación de la primera geometría no euclidiana, fue prontamente objeto de intensas investigaciones con resultados sumamente sorprendentes. Actualmente se asume tácitamente la consistencia e independencia de la axiomática euclidiana y se prueba, por necesidad lógica, que tales propiedades también han de atribuírsele a la geometría no euclidiana, Lobachevskiana o Bolyiana. De hecho otras geometrías no euclidianas han sido desarrolladas, particularmente la geometría elíptica o de Riemann la cual podemos asociarla con la geometría de la h.a.o. en la que no existen las paralelas.

Una de las consecuencias más importantes de estos hechos fue el sacar a la geometría de su molde tradicional. Los postulados de la geometría vienen a ser, para las matemáticos, simplemente hipótesis cuya verdad o falsedad física no les concierne. Las teorías genuinamente matemáticas provienen de un conjunto de postulados en tanto gocen de la propiedad de ser consistentes respecto a otro (prueba de consistencia relativa), esto es, que tal consistencia sea, por necesidad lógica, derivada de la consistencia de, digamos, la aritmética o de la misma geometría euclidiana si este fuese el caso. Por otra parte, el no tener los medios para establecer con certidumbre matemática la consistencia de las teorías axiomáticas clásicas, así como la imposibilidad de saber si tal o cual conjetura es demostrable dentro del campo de la teoría en la cual se ubica (el asunto de la indecibilidad debida a Kurt Gödel), trajo consigo otra cara de las matemáticas: *No existen las verdades “absolutas” en matemáticas.*

Conclusión

Hemos pretendido dar las ideas centrales del trabajo de Saccheri y su importancia dentro del desarrollo de las matemáticas. Su contribución abrió una de las puertas hacia una visión revolucionaria de la geometría y de las matemáticas en general. La invención de las geometrías no euclideas rompió la forma de pensar a lo largo de siglos enterrando, en principio, la idea de la geometría euclidiana como la auténtica geometría para describir el espacio físico. Hoy se sabe que geometrías no euclidianas pueden usarse como marcos de referencia para describir el espacio en que vivimos. Por otra parte acabó con la idea de la verdad absoluta de las matemáticas tan vieja como aquella. La matemática emergió pues como *una creación "arbitraria" del pensamiento y no como algo dictado por nuestras intuiciones sensoriales*. La matemática emergió también como una ciencia en la que, como dijo el filósofo matemático B. Rusell, "*nunca se sabe de que se habla, ni si lo que se dice es cierto*".

Bibliografía

Howard Eves. Great Moments in Mathematics after 1650. The Mathematical Association of America (1983).
Morris Kline. Matemáticas; La Pérdida de la Certidumbre. Siglo Veintiuno de España Editores (1985).
Mariano Perero. Historia e Historias de Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica (1994).
Luis Enrique Erro. El Pensamiento Matemático Contemporáneo. Biblioteca Enciclopédica Nacional (1944).