

CONCEPTO DE VARIABLE: DIFICULTADES DE SU USO A NIVEL UNIVERSITARIO

Lina Morales Peral, José Luis Díaz Gómez

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Un concepto de gran importancia en la matemática, de difícil comprensión entre los estudiantes, es el concepto de variable. Las razones de su dificultad residen, entre otras, porque éste es sorprendentemente difícil de definir, además de que al interior de las Matemáticas se utiliza de distintas formas.

Así, las dificultades que alumnos de diversas edades tienen para alcanzar un manejo adecuado del concepto de variable, sugieren la búsqueda de alternativas didácticas que propicien la formación de este concepto. En este trabajo se estudian algunas de las dificultades que se crean por esta variedad del uso de las variables, con el propósito de diseñar una didáctica orientada a la enseñanza de las matemáticas que promueva el logro de los conocimientos, en particular del concepto de variable a nivel universitario. Creemos firmemente que la enseñanza de los conceptos matemáticos, a cualquier nivel de profundidad, puede mejorarse mediante una didáctica conveniente.

Importancia del concepto de variable

Históricamente se ha observado que en general la enseñanza actual no produce los resultados deseados pues no forma en el estudiante nociones y operaciones nuevas; incluso frecuentemente origina un conjunto de ideas confusas que difícilmente asimila y retiene el estudiante, lo cual provoca una serie de dificultades para la correcta comprensión de las nociones y conceptos matemáticos.

Un concepto de gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de difícil comprensión entre los estudiantes lo es, en particular, el concepto de variable. Las razones de su dificultad residen, entre otras, porque éste es sorprendentemente difícil de definir. Este concepto es tan importante que su invención constituye un punto de partida en la historia de las matemáticas (Rajaratnan, 1957), y es una de las ideas fundamentales de la matemática desde la escuela elemental hasta la Universidad (Davis 1964, Hirsch y Lappan 1989). La comprensión del concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada (A. Philipp, 1992).

El problema

Las variables se usan generalmente en textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). El aprendizaje del concepto de variable logrado por los estudiantes a través de su paso por el sistema escolar es poco significativo; aunque son capaces de reconocer el papel que juega la variable en expresiones y problemas muy simples, un ligero aumento en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la búsqueda de soluciones memorizadas o por inspección que no son acordes al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas. Las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores (Ursini y Trigueros, 1997, págs. 1-19).

En matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar a las variables. En un estudio de los libros de texto de matemáticas publicados entre el final de los años 50s y el inicio de los 80s, Tonnenssen (1981) encontró que casi en todos ellos se define de una manera explícita o implícita el concepto de variable como un símbolo fijo, así también como un referente para un conjunto de al menos dos elementos. Los mismos símbolos son utilizados para denotar diferentes caracterizaciones de la variable, y diferentes símbolos son empleados para representar la misma caracterización de la variable. Esto contribuye a opacar las diferencias entre las distintas caracterizaciones de la variable y ocultar las condiciones que determinan dónde y cómo puede variar su valor (Matz, 1982). Más aún, es muy frecuente que para poder resolver un problema se requiera la capacidad de interpretar un mismo símbolo literal de maneras distintas. Así, para no implicar un uso particular de las variables, en este trabajo se utilizarán los símbolos literales para describir el uso matemático de una letra.

Estas consideraciones subrayan el carácter multifacético del concepto de variable y señalan que para poder trabajar exitosamente con la variable es necesario poder interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan para representarla, así como poder pasar de una interpretación a otra.

Por otra parte, los cursos de matemáticas que se imparten a nivel universitario requieren de una comprensión profunda de los conceptos del álgebra, en particular del concepto de variable, el cual es central en esta disciplina. Se espera que los estudiantes universitarios tengan un manejo sólido y flexible de la variable, sean capaces de distinguir entre sus diferentes usos y lo puedan manejar de manera integrada, pero, a pesar del nivel de escolaridad, persisten concepciones equivocadas y estrategias de solución de problemas propias de estudiantes con menor escolaridad, lo cual hace pensar que existe un anclaje a nivel de acción que impide a la mayoría de los estudiantes acceder a niveles de abstracción que les permitan tratar a la variable como un objeto cuya función se puede analizar. Pero realmente no se ha realizado un esfuerzo para estudiar la forma en que manejan este concepto los estudiantes que ingresan a la Universidad.

Muchas de las dificultades que los estudiantes encuentran con las variables se relacionan con su incapacidad para reconocer su papel correcto. Aunque puede ser que sólo uno de los usos de la variable aparezca en una tarea específica, es muy común que los estudiantes tengan que resolver problemas en los que aparece más de uno de sus usos, por ejemplo, deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una a otra interpretación, aún cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica. El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje de la matemática. En otras palabras, los estudiantes no sólo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema, sino que deben aprender que un símbolo literal puede asumir más de un papel dentro de un problema dado. Además, es de tomarse en cuenta que la evolución histórica del concepto de variable conlleva una serie de dificultades y problemas por los que tuvieron que atravesar los grandes matemáticos para irlo adecuando a sus necesidades.

Algunas dificultades que resaltan son las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico -con respecto a la etapa anterior- como el grado de abstracción. Esto se manifiesta cuando los números -elementos básicos, materia prima de las matemáticas escolares- dejan de ser percibidos como objetos, cosas, elementos concretos del pensamiento matemático, y son representados por letras, ya sea como incógnita, números generalizados, parámetros o variables

(Enfedaque, 1990, 23-31). El momento crítico del paso de los estudiantes al nivel de la simbología algebraica se ubica en nuestro sistema educativo al inicio del álgebra.

Todos estos puntos conducen a la necesidad de realizar una investigación que permita tener una visión más amplia de la problemática en la enseñanza y aprendizaje del concepto de variable para, en base a ella, elaborar una propuesta constructivista para su enseñanza que permita superar las dificultades de los estudiantes en relación a este concepto.

Marco teórico

Existe una gran diversidad de investigaciones relacionadas con el concepto de variable, en este trabajo utilizaremos la clasificación de los símbolos literales de Küchemann (1981) y el marco teórico de Wagner (1977).

Con el fin de determinar de qué manera los alumnos interpretan los símbolos literales usados para representar a las variables en un contexto algebraico escolar, Küchemann (1980) realizó un estudio con más de 3000 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 13 y 15 años. Para ello aplicó un cuestionario escrito, en el cual se pedía a los alumnos que interpretaran y manipularan expresiones algebraicas, y que resolvieran problemas en los que las variables estaban representadas por símbolos literales. Al analizar las respuestas dadas por los alumnos, Küchemann (1980) identificó seis diferentes maneras de interpretar los símbolos literales, a saber:

Letra evaluada. A la letra se le asigna un valor numérico;

Letra no utilizada. La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;

Letra como objeto. Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;

Letra como incógnita específica. La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella;

Letra como número generalizado. Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores;

Letra como variable. Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

En estos resultados destaca el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables, lo cual indica que quienes se inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales pueden interpretarse de diferentes formas, y que su significado puede variar con el problema. Esto muestra que la interpretación dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Küchemann considera que esta clasificación de la interpretación de los símbolos literales refleja un grado de dificultad creciente: afirma que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la “letra como variable”. El orden que Küchemann propone sugiere que es más fácil para el niño trabajar con la “letra como incógnita específica” que con la “letra como número generalizado”, y que es más fácil trabajar con la “letra como número generalizado” que con la “letra como variable”. Usiskin (1988), por su parte, destaca en su investigación cuatro usos diferentes de la variable y las asocia a diferentes concepciones del álgebra.

De aquí puede verse que las causas de esta dificultad en la comprensión del concepto de variable, estriban en que una variable tiene caracterizaciones que varían de acuerdo al problema

en el cual está inmerso. Por ejemplo, una variable puede representar, una *incógnita específica*, esto es, un número desconocido pero específico que puede ser calculado considerando las restricciones dadas; como un *número generalizado*, es decir un número indeterminado comprendido dentro de un método general; o también puede ser utilizado para representar una *relación funcional* entre dos cantidades cuyos valores cambian. Más aún, una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir, puede tener distintas caracterizaciones.

Así pues, el concepto de variable se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados y dependiendo del contexto lo tratamos de diferente manera (Usiskin, 1988). La comprensión del concepto de variable implica la posibilidad de superar la simple realización del cálculo y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos; la capacidad de prever hacia dónde conducen y la posibilidad de establecer relaciones entre los aspectos que asume la variable.

El trabajo adecuado con cada uno de los aspectos en los que la variable puede presentarse implica la posibilidad de: interpretar, en un problema dado, el significado de la variable, es decir, darse cuenta del papel que la variable juega en esa situación; operar con y sobre el símbolo empleado para representarla; utilizarla con el fin de representar un problema de manera simbólica (Ursini y Trigueros, 1997, pág. 1-19). Esto significa que los malos entendimientos que tienen los estudiantes alrededor del uso de letras en las ecuaciones contribuyen significativamente para esta dificultad.

Según Wagner, los símbolos para las variables matemáticas adquieren un significado cuando aparecen en un contexto y representan algún referente: el símbolo y su referente determinan el papel semántico de una variable; el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable.

Debido a que los símbolos para las variables son arbitrariamente intercambiables el contexto y el referente, juntos, aparte de cualquier símbolo particular, determinan un aspecto de las variables que es único en matemáticas. Esto es, el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable.

Las tres componentes, símbolo, referente y contexto, así como el papel semántico, el sintáctico y el matemático se combinan para contribuir para la interpretación de los estudiantes de las variables. Un cambio en cualquiera de estos componentes puede o no, dependiendo de la naturaleza del cambio, causar un cambio correspondiente en cada aspecto de la variable. Esto es, un cambio en el contexto o en el referente pueden o no afectar el papel matemático de la variable, excepto donde interviene el uso convencional.



La didáctica propuesta por Aebli en términos de la psicología de Piaget proporciona un fundamentación teórica para entender cómo se construye el conocimiento y un marco teórico

para nuestro trabajo. Este modelo se basa en el modelo didáctico de Hans Aebli (1958), el cual está estructurado, organizado y fundamentado en la psicología de Jean Piaget (1957).

El modelo didáctico reúne diversas ideas de los trabajos de Piaget y Aebli, entre ellas mencionamos: el planteamiento de problemas como punto de partida en la enseñanza de un concepto matemático, la inclusión de operaciones inversas y asociativas, al actividad constante del alumno, el uso de representaciones múltiples, la ley de adecuación óptima de Hans Aebli (1992).

Metodología y Presentación de Resultados

Para detectar los usos que se le han estado dando al concepto de variable, aplicamos una encuesta consistente en un solo punto: Defina el concepto de variable. Esta encuesta se aplicó a profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos y, en base a las respuestas obtenidas, se diseñó un primer cuestionario que fue sometido a consideración de profesores de matemáticas para criticar la claridad de sus enunciados, el nivel de dificultad de los problemas y recoger sugerencias al respecto.

A partir de éstas se diseñó un segundo cuestionario, más amplio que el anterior, que se dividió en tres partes y se analizaron por separado. Este es el cuestionario que aplicamos a estudiantes de ciencias e ingeniería y ciencias básicas para evaluar el manejo y el conocimiento que tengan los estudiantes acerca de las diversas caracterizaciones del concepto de variable.

Los cuestionarios contemplan diversas caracterizaciones de la variable:

1. La variable como una incógnita específica, es decir, la variable representa un número específico pero desconocido que puede ser calculado bajo ciertas restricciones.
2. La variable como un número general, es decir, la variable representa un número indeterminado comprendido dentro de un método general.
3. La variable como una relación funcional, es decir, la variable representa números cuyo valor se mueve dentro de un rango de valores ligados entre sí por una relación.

Con el fin de obtener una visión más completa de la comprensión de la noción de variable que tienen los estudiantes, se hizo un análisis cualitativo de las respuestas dadas al cuestionario. Comenzamos por agruparlas primeramente en tres categorías: no contestó, respuesta correcta, respuesta incorrecta. Posteriormente, se procedió a analizar para cada pregunta todas las respuestas incorrectas. Cabe señalar que las caracterizaciones del concepto de variable que aquí manejamos nos permitió un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes.

A partir de este análisis se detectaron los siguientes puntos:

- Se esperaba que fuera clara la diferencia entre variables y constantes, pero no fue así.
- Se refleja un pobre manejo del concepto de variable, aún visto como relación funcional.
- Se observa dificultad para redactar en oración verbal algunas proposiciones: no se hace patente el orden en que se realizan las operaciones ni es clara la separación entre unas y otras.
- No se tiene habilidad para interpretación de problemas y su representación mediante una expresión.
- Se cometen errores injustificados para el nivel de preparación matemática de los estudiantes.
- Se percibe bastante dificultad para la generalización de resultados en un proceso, al igual que para representar como relación funcional una cierta situación.

Así, al parecer el aprendizaje del concepto de variable no se ha logrado al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas, cuando enfrentan actividades que requieren de generalización y su expresión.

Bibliografía

- [1] Aebli, Hans. *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*. Editorial Kapelusz. Biblioteca de Cultura Pedagógica.
- [2] Davis, Robert B. *Discovery in Mathematics: A text for Teachers*. Reading. Mass.:Addison-Wesley Publishing Co., 1964.
- [3] Enfedaque, Jesús. De los números a las letras. *Revista Semana* 5. 1990.
- [4] Hirsch, Christian R., and Glenda Lappan. Transition to High School Mathematics. *Mathematics Teacher* 82 (November 1989):614-18.
- [5] Küchemann, D.E. *The understanding of generalised arithmetic by secondary school children*. Unpublished doctoral dissertation. Chelsea College, University of London. 1980.
- [6] Küchemann, D.E. Algebra. En: *Children's understanding of mathematics*. Hart. K. (Ed.). London. 1981.
- [7] Matz, M. Towards a process model for high school algebra errors. En: D. Seeman and J.I. Brown. *Intelligent Tutoring Systems*. Academic Press. 1982.
- [8] Philipp, Randolph A. (Octubre, 1992). The Many Uses of Algebraic Variables. *Mathematics Teacher*. Vol. 85, No. 7.
- [9] Rajaratnan, Nageswari. *A study of some concepts of Algebra as used by Writers of High School Text-Books*. Ph. D.: diss. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1957.
- [10] Tonnensen, L.H. *Measurement of the levels of attainment by college mathematics students of the concept variable*. Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin. Madicos. 1980.
- [11] Ursini Legovich, Sonia. *Pupils' approaches to different characterizations of variable in Logo*. Thesis submitted in fulfilment of the requirement for the Ph. D. Degree of the University of London. December, 1993.
- [12] Ursini y Trigueros. Dificultades en los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN y Departamento de Matemáticas del ITAM, Ed. Hitt,F.
- [13] Usiskin, Zalman. Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *The ideas of Algebra*, K -12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Arthur F. Coxford y Albert P. Shulte, 8- 19. Reston, Va. : The Council, 1988: 8-19.
- [14] Wagner, Sigrid. *Conservation of equation, conservation of function, and their relationship to formal operational thinking*. Unpublished doctoral dissertation, New York University.1977.
- [15] Wagner, Sigrid, 1981. An Analitical Framework for Mathematical Variables. *Proceeding of the Fifth Conference for the International Group of Psychology of Mathematics Education*, editado por C. Comiti and G. Vernaud: 165- 170. Grenoble, Francia: Laboratoire I. M. A.G.,
- [16] Wagner, Sigrid. (Octubre 1983):What Are These Things Called Variables ? *Mathematics Teacher* 76. págs. 474- 479.